Семинар по спецфункциям. Листок 6

В этом листке собраны дополнительные задачи для тех, кому их не хватило для обязательного отчета и рассказа в первом полугодии

1.* Интеграл Ханкеля $\oint_C (-t)^{z-1}e^{-t}dt$, где C - контур, охватывающий действительную полуось $(0,+\infty)$ и обходящий начало координат в направлении против часовой стрелки, осуществляет аналитическое продолжение эйлерова интеграла $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ на всю комплексную плоскость переменной z, за исключением целых точек:

$$\Gamma(z)=\frac{-1}{2i\sin\pi z}\oint_C (-t)^{z-1}e^{-t}dt.$$

(см. лекцию 4 на http://www.hse.ru/data/2011/11/07/1272272421/lekciya4.pdf). Предъявите интеграл типа Ханкеля, осуществляющий аналитическое продолжение эйлерова интеграла $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ на произвольные комплексные значения переменных x и y.

2.* Докажите, что

$$\int_0^\infty x^{s-1}\sin ax\,dx=a^s\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s,\qquad a>0,\quad -1<\operatorname{Re}s<1.$$

3.* Докажите, что аналитическое продолжение ζ-функции Римана $\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$ в область $0<\operatorname{Re}s<1$ можно определить формулой

$$\zeta(s)=s\int_0^\infty\frac{[x]-x}{x^{s+1}}dx,$$

где $[x]$- целая часть x, а аналитическое продолжение в область $-1<\operatorname{Re}s<0$ - формулой

$$\zeta(s)=s\int_0^\infty\frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx.$$

4.** Функциональное соотношение на ζ-функцию Римана можно получить, воспользовавшись результатом предыдущей задачи и разложением в ряд Фурье периодической функции $f(x)=[x]-x+\frac{1}{2}$. Восстановите это доказательство.

5. а)* Докажите, что при $\operatorname{Re}s>1$

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^s}=\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s),\qquad \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^s}=\left(1-2^{-s}\right)\zeta(s).$$

Вычислите значения левых частей при $s=1,2$. Покажите, что первая из этих формул может быть использована для аналитического продолжения $\zeta(s)$ в область $\operatorname{Re}s>0$ и даже в область $\operatorname{Re}s>-1$.

б)* Пусть $f(x)$ - периодическая ступенчатая функция, равная 1 при $2n<x<2n+1$ и -1 при $2n-1<x<2n$. Покажите, что аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в область $-1<\operatorname{Re}s<0$ может быть определено через преобразование Меллина этой функции,

$$\zeta(s)=\frac{1}{2s(2^{1-s}-1)}\int_0^\infty f(x)x^{-s-1}dx,\qquad -1<\operatorname{Re}s<0.$$

6.** Функциональное соотношение на ζ-функцию Римана можно получить еще одним способом, воспользовавшись результатом предыдущей задачи и разложением в ряд Фурье периодической ступенчатой функции, равной 1 при $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ и -1 при $(2n-1)\pi<x<2n\pi$. Восстановите это доказательство.