Вводная лекция

1 Релятивистская инвариантность

2 Электромагнитное поле

3 Скалярное поле, лагранжианы

4 Электромагнитное поле. Волны

5 Запаздывающие потенциалы

6 Энергия и импульс в теории поля

7 Взаимодействующие скалярные поля

8 Скалярная электродинамика

8.1 Локальные преобразования и ковариантные производные

Вспомним, что электромагнитное взаимодействие для заряженной частицы вводилось "удлинением импульса". Аналогично, в теории поля взаимодействие с электромагнитным полем вводится "удлинением производной"

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &\to (\partial_\mu - iqA_\mu)\,\phi \equiv \nabla_\mu \phi \\ \partial_\mu \bar{\phi} &\to (\partial_\mu + iqA_\mu)\,\bar{\phi} \equiv \bar{\nabla}_\mu \bar{\phi} \end{aligned} \tag{8.1}$$

и

$$\mathcal{L} = \bar{\nabla}_\mu \bar{\phi} \nabla^\mu \phi - V(|\phi|) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{8.2}$$

- Калибровочная инвариантность: при преобразованиях $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x)$ тензор поля $F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$ и действие для электромагнитного поля не меняется. Со скалярным полем

$$\phi \to e^{iq\varepsilon(x)}\phi, \qquad \bar{\phi} \to e^{-iq\varepsilon(x)}\bar{\phi} \tag{8.3}$$

тогда

$$\begin{gathered}\nabla_\mu \phi \to \left(\partial_\mu - iq(A_\mu + \partial_\mu \varepsilon)\right) e^{iq\varepsilon(x)}\phi = \\ = e^{iq\varepsilon(x)} \left(\partial_\mu + iq\partial_\mu \varepsilon - iq(A_\mu + \partial_\mu \varepsilon)\right)\phi = \\ e^{iq\varepsilon(x)} \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\phi = e^{iq\varepsilon(x)}\nabla_\mu \phi\end{gathered} \tag{8.4}$$

и аналогично для комплексно-сопряженного $\bar{\phi}$.

- В отсутствие взаимодействия с калибровочным полем (константа взаимодействия $q \to 0$) действие комплексного скалярного поля инвариантно относительно лишь *глобальных* фазовых преобразований, когда $\varepsilon = \text{const}$.
- На длинную производную можно смотреть как на связность в расслоении с группой $U(1)$. Аналогично для любой другой группы Ли возникнет неабелева (матричная) теория.
- Чтобы не возникало проблемы с обозначениями: формулы (8.1) представляют собой действие одного и того же оператора (ковариантного дифференцирования) на *разные* поля (или действующего в *разных* расслоениях) - с разными зарядами ($\pm q$).

8.2 Уравнения движения и ток

Уравнения движения: проварьируем действие

$$\begin{gathered}\delta(\bar{\nabla}_\mu \bar{\phi} \nabla^\mu \phi) = \delta(\bar{\nabla}_\mu \bar{\phi})\nabla^\mu \phi + \bar{\nabla}_\mu \bar{\phi}\delta(\nabla^\mu \phi) = \\ = (\partial_\mu \delta\bar{\phi} + iq\delta A_\mu \bar{\phi} + iqA_\mu \delta\bar{\phi})\nabla^\mu \phi + \\ + \bar{\nabla}_\mu \bar{\phi}(\partial_\mu \delta\phi - iq\delta A_\mu \phi - iqA_\mu \delta\phi) = \\ \simeq iq\delta A_\mu \left(\bar{\phi}\nabla^\mu \phi - (\bar{\nabla}_\mu \bar{\phi})\phi\right) - \\ -\delta\bar{\phi}(\partial_\mu - iqA_\mu)\nabla^\mu \phi - \delta\phi(\partial_\mu + iqA_\mu)\bar{\nabla}^\mu \bar{\phi}\end{gathered} \tag{8.5}$$

а кроме того, мы уже знаем, что

$$
\begin{aligned}
\delta V(\bar{\phi}, \phi) &= \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \delta \bar{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi \\
\delta \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) &\simeq \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

с точностью до “поверхностных членов”. Таким образом, получаем

$$
\begin{gathered}
\partial_\mu F^{\mu\nu} = q j^\nu = -iq \left(\bar{\phi} \nabla^\nu \phi - (\bar{\nabla}^\nu \bar{\phi}) \phi \right) \\
\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} = 0, \qquad \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\mu \bar{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0
\end{gathered}
\tag{8.7}
$$

уравнения, в которых везде кроме обычных производных стоят ковариантные.

В первом из уравнений естественным образом появился электромагнитный ток

$$
\begin{aligned}
j_\mu &= -i \left(\bar{\phi} \nabla_\mu \phi - (\bar{\nabla}_\mu \bar{\phi}) \phi \right) = \\
&= -i \left(\bar{\phi} \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \bar{\phi}) \phi \right) - 2q A_\mu |\phi|^2
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

При $q \to 0$ вспомним, что

$$
\partial_\mu j^\mu \underset{q \to 0}{=} -i(\bar{\phi} \Box \phi - \Box \bar{\phi} \phi) = i \left(\bar{\phi} \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} - \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \underset{V(\bar{\phi}, \phi) = V(|\phi|)}{=} 0
\tag{8.9}
$$

ток сохранялся для “хорошего потенциала” в силу уравнений движения. Теперь же

$$
\partial_\mu j^\mu = -i(\bar{\phi} \Box \phi - \Box \bar{\phi} \phi) - 2q A^\mu (\partial_\mu \bar{\phi} \phi + \bar{\phi} \partial_\mu \phi) - 2q \partial_\mu A^\mu |\phi|^2
\tag{8.10}
$$

условие сохранения меняется. Но и уравнения движения изменились

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} = \Box \phi - 2iq A_\mu \partial^\mu \phi - iq \partial_\mu A^\mu \phi - q^2 A_\mu^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \\
0 &= \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\mu \bar{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = \Box \bar{\phi} + 2iq A_\mu \partial^\mu \bar{\phi} + iq \partial_\mu A^\mu \bar{\phi} - q^2 A_\mu^2 \bar{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi}
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

В силу этих уравнений движения

$$\begin{gathered}
\bar\phi\left(\Box\phi-2iqA_\mu\partial^\mu\phi-iq\partial_\mu A^\mu\phi-q^2A_\mu^2\phi+\frac{\partial V}{\partial\bar\phi}\right)-\\
-\phi\left(\Box\bar\phi+2iqA_\mu\partial^\mu\bar\phi+iq\partial_\mu A^\mu\bar\phi-q^2A_\mu^2\bar\phi+\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)=\\
=(\bar\phi\Box\phi-\Box\bar\phi\phi)-2iqA_\mu(\bar\phi\partial_\mu\phi+\partial_\mu\bar\phi\phi)-2iq\partial_\mu A^\mu|\phi|^2+\\
+\left(\bar\phi\frac{\partial V}{\partial\bar\phi}-\phi\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)=0
\end{gathered}\tag{8.12}$$

имеем

$$\begin{gathered}
\partial_\mu j^\mu=-i(\bar\phi\Box\phi-\Box\bar\phi\phi)-2qA^\mu(\partial_\mu\bar\phi\phi+\bar\phi\partial_\mu\phi)-2q\partial_\mu A^\mu|\phi|^2=\\
=i\left(\bar\phi\frac{\partial V}{\partial\bar\phi}-\phi\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)\underset{V(\bar\phi,\phi)=V(|\phi|)}{=}0
\end{gathered}\tag{8.13}$$

и ток по-прежнему сохраняется.

8.3 Модель Гинзбурга-Ландау

Вернемся теперь к выбору конкретного потенциала $V(|\phi|)=\frac{\lambda}{4}(|\phi|^2-a^2)^2$ или к (релятивистской) модели Гинзбурга-Ландау, и попробуем найти какие-нибудь решения уравнений движения (желательно интересные).

Очевидное вакуумное решение

$$A_\mu=0,\qquad \phi=ae^{i\vartheta}\tag{8.14}$$

или ему калибровочно-эквивалентное $A_\mu=\partial_\mu\varepsilon$, $\phi=ae^{i\vartheta+iq\varepsilon(x)}$. Энергия такого решения

$$\mathcal{E}=\int d^3\mathsf{x}\left(\partial_0\bar\phi\partial_0\phi+\sum_i\left(\bar\nabla_i\bar\phi\nabla_i\phi+\tfrac{1}{2}F_{0i}^2\right)+V(|\phi|)+\tfrac{1}{2}\sum_{i>j}F_{ij}^2\right)\tag{8.15}$$

равна равна нулю (при нормировке $V(a)=0$). Заметим, что для не зависящих от времени конфигураций полей ($\dot A_\mu=0$, $\dot\phi=0$ и $\dot{\bar\phi}=0$)

$$S=-\int dt\ \mathcal{E}=-\int dtd^3\mathsf{x}\left(\sum_i\bar\nabla_i\bar\phi\nabla_i\phi+V(|\phi|)+\tfrac{1}{2}\sum_{i>j}F_{ij}^2\right)\tag{8.16}$$

Посмотрим на квадратичные флуктуации вокруг вакуума. Сдвинув, например относительно "вещественного" вакуума с $\vartheta = 0$: $\phi = a + \varphi$, $\bar{\phi} = a + \bar{\varphi}$, получим

$$\begin{gathered}\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi = \tfrac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \tfrac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 \\ \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 = \frac{\lambda}{4} a^2 \left(\varphi + \bar{\varphi}\right)^2 + \ldots = \frac{\lambda a^2}{2} \varphi_1^2 + \ldots \equiv \tfrac{1}{2} m_H^2 \varphi_1^2 + \ldots\end{gathered} \tag{8.17}$$

вещественное безмассовое поле, и поле с массой $m_H = \sqrt{\lambda} a$. Кроме того, взаимодействие скалярного и векторного полей

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{\phi} \nabla^\mu \phi \big|_{\phi = a} = q^2 a^2 A_\mu^2 \tag{8.18}$$

приводит к появлению массы у векторного поля $m_V = \sqrt{2} q a$. Ясно, что в вакууме с вещественным a компонента $\delta\varphi_1 \sim \delta(\rho \cos\theta) \sim \delta\rho$, а $\delta\varphi_2 \sim \delta(\rho \sin\theta) \sim a \delta\theta$ при $\rho \sim a$, $\theta \sim 0$.

Можно и прямо показать, пользуясь формулами

$$\nabla_\mu \rho = \partial_\mu \rho, \qquad \nabla_\mu \theta = \partial_\mu \theta - q A_\mu \tag{8.19}$$

или прямой заменой переменных, что действие в угловых переменных принимает вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 \nabla_\mu \theta \nabla^\mu \theta - V(\rho) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \underset{\rho \to a + \rho}{=} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \\ + (a + \rho)^2 (\partial_\mu \theta - q A_\mu)(\partial^\mu \theta - q A^\mu) - V(a + \rho) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + q^2 (a + \rho)^2 B_\mu B^\mu - V(a + \rho) - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}\end{gathered} \tag{8.20}$$

где

$$\begin{gathered}B_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\end{gathered} \tag{8.21}$$

массивное векторное поле и его напряженность. Заметим, что

- Переход от A_μ к B_μ сингулярен при $q \to 0$;
- Калибровочное поле A_μ "съело" голдстоуновский безмассовый бозон θ - фазу комплексного скаляра, и превратилось в массивное векторное поле B_μ с массой $m_V = \sqrt{2} q a$ (эффект Хиггса).