

Алгебра. 1 курс. Листок 6.

◇ **6.1.** V — конечномерное линейное пространство над полем \mathbb{K} , U — линейное подпространство в V , e_1, \dots, e_k — базис в U . Докажите, что этот базис можно дополнить до базиса V , т.е. существуют такие $g_1, \dots, g_l \in V$, что элементы $e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_l$ образуют базис V .

◇ **6.2.** а) W — конечномерное линейное пространство над полем \mathbb{K} , U и V — линейные подпространства в W , e_1, \dots, e_k — базис в U , g_1, \dots, g_l — базис в V , причем $\dim W = k + l$ и $U \cap V = \{0\}$. Докажите, что $e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_l$ образуют базис W .

б) Верно ли, что если U, V и T — три линейные подпространства конечномерного линейного пространства W , такие что $U \cap V = U \cap T = V \cap T = \{0\}$ и $\dim U + \dim V + \dim T = \dim W$, то объединение базисов пространств U, V и T является базисом W ?

◇ **6.3.** U и V — линейные подпространства конечномерного линейного пространства W .

а) Докажите, что множество $U \cap V$ тоже является линейным подпространством W .

б) Докажите, что множество $U + V = \{u + v, u \in U, v \in V\}$ тоже является линейным подпространством W .

в) Докажите, что $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$.

◇ **6.4.** $f : U \rightarrow V$ — линейное отображение конечномерных линейных пространств. Докажите, что если $\text{Ker } f = \{0\}$, то

а) f инъективно (т.е. из $u_1 \neq u_2$ следует, что $f(u_1) \neq f(u_2)$). б) $\dim U \leq \dim V$.

в) в U и V можно выбрать базисы таким образом, что матрица линейного отображения f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} E \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевая.

◇ **6.5.** Пусть $f : U \rightarrow V$ — линейное отображение конечномерных линейных пространств. Докажите, что в U и V можно выбрать базисы таким образом, что матрица линейного отображения f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевые матрицы.

◇ **6.6.** Пусть $f : U \rightarrow V$ — линейное отображение конечномерных линейных пространств. Докажите, что $\dim U = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.

◇ **6.7.** Зафиксируем $n+1$ число $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$. Определим отображение f из пространства $\mathcal{P}_n = \{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n, a_i \in \mathbb{R}\}$ (т.е. многочлены степени не выше n) в пространство \mathbb{R}^{n+1} следующим образом: $f(P(t)) = (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_{n+1})) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что $f : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ линейное отображение, найдите его матрицу в стандартных базисах и докажите, что f обратимо.

◇ **6.8.** Пусть $\mathcal{P}_2 = \{at^2 + bt + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ — пространство многочленов степени не выше второй, M — пространство вещественных матриц размером 2×2 , A — фиксированная матрица из M . Определим отображение $f_A : \mathcal{P}_2 \rightarrow M$ так: $f_A(P(t)) = P(A)$. (Матрица $P(A)$ — это матрица $aA^2 + bA + cE$, где E — единичная матрица.) Докажите, что это линейное отображение. Для следующих случаев найдите его ядро и образ, а также матрицу в подходящих базисах:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

г) Как изменится образ, если вместо \mathcal{P}_2 взять \mathcal{P}_n или $\mathbb{R}[x]$?

◇ **6.9.** Пусть U_0 — линейное подпространство в U , V_0 — линейное подпространство в V ; докажите, что множество всех таких линейных отображений $f : U \rightarrow V$, что $\text{Ker } f \supset U_0$ и $\text{Im } f \subset V_0$, является линейным пространством. Найдите его размерность, если все пространства конечномерны, причем $\dim U = k$, $\dim U_0 = k_0$, $\dim V = l$, $\dim V_0 = l_0$.

◇ **6.10.** а) Линейный оператор на двумерном линейном пространстве имеет в некотором базисе матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажите, что ни в каком базисе этот оператор не записывается диагональной матрицей.

б) Тот же вопрос в n -мерном случае для матрицы $a_{i,j} = \delta_{i+1,j}$.

◇ **6.11.** Напишите в стандартном базисе трехмерного пространства \mathbb{R}^3 матрицы следующих линейных операторов:

- ортогонального проектирования на плоскость $x + y + z = 0$;
- ортогонального проектирования на прямую $x = y = z$;
- поворота на угол φ вокруг прямой $x = y, z = 0$.

◇ **6.12.** Пусть $\mathcal{P}_n = \{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n, a_i \in \mathbb{R}\}$ — пространство многочленов степени не выше n . Определим отображение $\Delta : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ так: $\Delta(P(t)) = P(t+1) - P(t)$. (Δ называется оператором первой разности.) Докажите, что это линейное отображение, найдите его ядро и образ, а также матрицу в базисе $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n$. Найдите минимальный многочлен оператора Δ .

◇ **6.13.** Пусть f, g — два линейных оператора на конечномерном линейном пространстве V .

- Докажите, что $\text{Ker}(f \circ g) \supset \text{Ker } g$, и $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$.
- Приведите пример двух операторов, для которых оба включения строгие.

◇ **6.14.** Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V .

- Докажите, что если $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$, то $\forall n > k \text{ Ker } f^n = \text{Ker } f^k$.
- Докажите, что если $\text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$, то $\forall n > k \text{ Im } f^n = \text{Im } f^k$.
- Докажите, что если f — нильпотентный оператор, то $f^{\dim V} = 0$.

◇ **6.15.** Пусть f идемпотентный линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V .

- Докажите, что $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
- Докажите, что в V можно выбрать базис таким образом, что матрица оператора f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевые матрицы.

◇ **6.16.** Пусть линейный оператор f на конечномерном линейном пространстве V удовлетворяет уравнению $f^2 = \text{Id}_V$. Докажите, что в V можно выбрать базис таким образом, что матрица оператора f будет иметь такой блочный вид: $\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -E \end{pmatrix}$, где E — единичные матрицы, а $\mathbf{0}$ — нулевые матрицы. ($\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.)

◇ **6.17.** Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V , U — линейное подпространство V . Пусть базис e_1, \dots, e_n выбран таким образом, что e_1, \dots, e_k ($k < n$) — базис пространства U . Докажите, что подпространство U инвариантно относительно f (т.е. $f(U) = U$) тогда и только тогда, когда оператор f записывается в базисе e_1, \dots, e_n блочной матрицей вида $\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$, где A — $k \times k$ матрица, а $\mathbf{0}$ — нулевая матрица.

◇ **6.18.** Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V , $\lambda \in \mathbb{K}$ фиксировано. Докажите, что множество $V_\lambda = \{v \in V, f(v) = \lambda v\}$ является линейным подпространством V , инвариантным относительно f .

◇ **6.19.** Пусть f — линейный оператор на конечномерном линейном пространстве V , $v_1, \dots, v_k \in V$ таковы, что $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, k$, причем $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ все различны. Докажите, что тогда v_1, \dots, v_k линейно независимы.

◇ **6.20.** Пусть A диагональная матрица, причем все стоящие на диагонали числа различны. Докажите, что любая матрица, перестановочная с A , имеет вид $P(A)$, где $P(x)$ — некоторый многочлен.

◇ **6.21.** Вычислите определитель матрицы $\lambda E - A$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

◇ **6.22.** Найдите минимальный многочлен матрицы A из предыдущей задачи.