Листок 10 Алгебра 2 2 Модуль

Группы предполагаются конечными, представления комплексными. Эрмитово произведение на пространстве комплекснозначных функций задается формулой

$$< \phi, \psi >= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Функция на группе называется центральной, если она принимает одинаковые значения на сопряженных элементах. Сопоставим функции f на группе и представлению (V, ρ) следующий оператор на V

$$L_f = \sum_{g \in G} \overline{f(g)}\rho(g)$$

1. Докажите что если f центральна, то L_f коммутирует с действием группы.

2. Докажите что для центральной функции L_f действует в неприводимом представлении умножением на спаривание этого элемента с характером представления.

Определим действие элемента группы на пространстве функций на группе правилом $\sigma(g)F(x) = F(g^{-1}x)$

3. Рассмотрим функцию δ_y на группе определенную правилом $\delta_y(y) = 1$, $\delta_y(x) = 0, x \neq y$. Найдите $\sigma(g)\delta_y$.

4. Докажите что σ - представление. Оно называется корегулярным.

5. Докажите что элемент из центра групповой алгебры нетривиально действует в корегулярном представлении.

6. Докажите что характеры неприводимых представлений образуют базис центральных функций на группе. Стало быть число неизоморфных неприводимых представлений равно числу классов сопряженности элементов группы.

7. Кратность вхождения неприводимого представления в любое равна эрмитову произведению характера этого представления с характером неприводимого.

8. Найдите характер регулярного представления. Вычислите кратность вхождения неприводимого представления в регулярное. Докажите что сумма квадратов размерностей неизоморфных неприводимых представлений равна порядку группы.