Addendum

Задача 1. Докажите тождества

a) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ для k-формы ω и l-формы η,

b) $(\omega \wedge \eta) \wedge \nu = \omega \wedge (\eta \wedge \nu)$ для дифференциальных форм ω, η, ν,

c) $\iota_v \iota_u \omega = -\iota_u \iota_v \omega$ для векторных полей u, v и формы ω,

d) $\iota_v(\omega \wedge \eta) = \iota_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_v(\eta)$ для векторного поля v, k-формы ω и l-формы η.

Задача 2. Пусть M — ориентированное многообразие размерности m в $\mathbb{R}^n$. Для $x \in M$ определим функцию ω_x на m-ках касательных векторов в x так: пусть $v_1, \ldots, v_m \in T_x M$, B — матрица координат этих векторов в любой из карт, G — матрица Грама, $G_{ij} = (v_i, v_j)$, где скалярное произведение вычисляется в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\omega_x = \mathrm{Sign}(\det(B))\sqrt{\det(G)}.$$

a) Докажите, что ω является m-формой. Она называется *формой объёма.*

b) Докажите, что сопоставление множеству $X \subset M$ числа $\int_X \omega$ задаёт меру на компактных подмножествах M.

c^*) Предположим, что M компактно. Для $\varepsilon > 0$ пусть $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ — множество точек, отстоящих от M на расстояние не больше ε. Докажите, что предел $\mu(M_\varepsilon)/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ равен $\int_M \omega$

Задача 3. Пусть X — множество подмножеств $\mathbb{R}^n$. Напомним, что для $A \in X$ *верхняя мера* $\mu^*(A)$ — инфимум сумм объёмов параллелепипедов, образующих конечные или счётные покрытия A.

a) Докажите, что отношение $A \sim B$, если $\mu^*(A \triangle B) = 0$ является отношением эквивалентности.

b) Докажите, что $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$ — метрика на классах эквивалентности X.

c) Докажите, что элементарные множества (конечные объединения параллелепипедов) плотны в множестве измеримых по Лебегу множеств относительно метрики d.

d) Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность множеств, для которой $d(A_i, A_j) < 2^{-i}$. Докажите, что последовательность A_i сходится к $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcap\limits_{j=i}^{\infty} A_j$.

e) Докажите, что подпространство измеримых по Лебегу множеств полно отностительно этой метрики.

f) Докажите, что всякое измеримое по Лебегу множество эквивалентно борелевскому множеству.

g^*) Приведите пример измеримого по Лебегу множества, не являющегося борелевским.