Дифференциальные уравнения. Задачи 6.

Задача 1. Найти все особые точки системы

$$\dot{x} = xy + 12, \qquad \dot{y} = x^2 + y^2 - 25,$$

исследовать их устойчивость и нарисовать фазовый портрет.

Задача 2. Найти все особые точки системы на торе $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

$$\dot{x} = -\sin(y), \qquad \dot{y} = \sin(x) + \sin(y),$$

исследовать их устойчивость и нарисовать фазовый портрет.

Задача 3. Может ли неустойчивое по Ляпунову положение равновесия сделаться устойчивым после линеаризации? А ассимптотически устойчивым?

Задача 4. Пусть любое решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами стремится к нулю при $t \to \infty$. Верно ли, что нулевое решение ассимптотически устойчиво?

Задача 5. Докажите, что отношение линейно независимых решений уравнения $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ не имеет точек локального максимума.

Задача 6. Пусть функция q положительна. Докажите, что отношение $y'(t)/y(t)$ убывает на интервале, где $y(t) \neq 0$.

Задача 7. Доказать, что отношение координат $u = x_1/x_2$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a(t)x_1 + b(t)x_2 \\ \dot{x_2} = c(t)x_1 + d(t)x_2 \end{cases}.$$

удовлетворяет некоторому уравнению Риккати $\dot{u} = \alpha_2(t)u^2 + \alpha_1(t)u + \alpha_0(t)$.

Задача 8. Пусть решения $\varphi_x(t)$ уравнения Риккати $\dot{u} = \alpha_2(t)u^2 + \alpha_1(t)u + \alpha_0(t)$ с начальным условием $\varphi_x(0) = x$ определены для всех $t \in [0, 1]$ и всех $x \in [a, b]$. Сколько неподвижных точек может иметь отображение фазового потока за единичное время $x \mapsto \varphi_x(1)$ при $x \in [a, b]$?