1. Лекция 1

Классические вариационные задачи. Элементарный подход (принцип Ферма). Уравнения Эйлера.

1) Изопериметрическая задача (задача Дидоны).

   Формализация: $(x(t), y(t))$ — решение изопериметрической задачи на плоскости
$$\int_0^T \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\ dt \mapsto \min, \quad \int_0^T y(t)\dot{x}(t)\ dt = C.$$
2) a) Вписать в треугольник параллелограмм наибольшей площади. b) Задача Штейнера для треугольника.
3) Задача о брахистохроне. И. Бернулли 1696 г.

   Формализация: (x_0, y_0) — нижняя точка желоба. Закон сохранения энергии $gy = \frac{|v|^2}{2}$, v — скорость. Время прохождения участка dx: $\sqrt{1+(y'(x))^2}\frac{dx}{|v(x)|}$.
$$\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\ dx \mapsto \min,\ y(x_0) = y_0.$$
4) Принцип Ферма.
5) Эйлер: обобщение задачи о брахистохроне. Уравнение Эйлера (18.в).
6) Лагранж. Метод множителей Лагранжа. Вариационный подход в механике. "Аналитическая механика", 1788.
7) Вариационные задачи в геометрии. Геодезические, минимальные поверхности.
8) Уравнения в частных производных. Вариационная формулировка задачи $\Delta u = f$.
9) Экономика. Транспортная задача Монжа (19 в.). Линейное программирование Канторовича (30-50 гг. 20 в.).
10) Оптимальное управление и принцип максимума Понтрягина (50-60 гг. 20 в.)

Простейшая задача вариационного исчисления.
$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt \to extr,\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$
Пространство $C^1([t_0, t_1])$. Норма в $C^1([t_0, t_1])$. Слабый локальный экстремум, как локальный экстремум в $C^1([t_0, t_1])$.

Теорема 1.1. *(Эйлер). Пусть $\hat{x}(\cdot)$ является слабым локальным экстремумом. Пусть $L, L_x, L_{\dot{x}}$ непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика*
$$\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t) : t \in [t_0, t_1]\},\ \hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1]).$$
Тогда на $[t_0, t_1]$ выполнено уравнение Эйлера
$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0.$$
Здесь $\hat{L}_{\dot{x}}(t) := \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x, \dot{x})\Big|_{x=\hat{x}(t), \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}, \quad \hat{L}_x(t) := \frac{\partial}{\partial x} L(t, x, \dot{x})\Big|_{x=\hat{x}(t), \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}.$

Задачи 1

В задачах 1)-7) найти решение уравнения Эйлера и доказать, что оно является абсолютным минимумом. В задачах 6)-7) использовать задачу 8).

1) $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)\ dt \to extr,\ x(0) = x(1) = 0$

2) $\int_1^e t\dot{x}^2\ dt \to extr,\ x(1) = 0, x(e) = 1$

3) $\int_0^1 e^x\dot{x}^2\ dt \to extr,\ x(0) = 0, x(1) = \ln 4$

4) $\int_0^1 x^2\dot{x}^2\ dt \to extr,\ x(0) = 2, x(1) = \sqrt{3}$

5) $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \operatorname{ch} t)\ dt \to extr,\ x(0) = x(1) = 0$

6) $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\ dt \to extr,\ x(0) = 1, x(\pi/2) = 0$

7) $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\ dt \to extr,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1, x_2(\pi/2) = -1.$

8) Доказать, что если $h \in C_0^1([0, \pi/2])$, то $\int_0^{\pi/2} \dot{h}^2\ dt \geq \int_0^{\pi/2} h^2\ dt$. Указание: рассмотрите интеграл $\int_0^{\pi/2} (\dot{h} - h \cdot \operatorname{ctg} t)^2\ dt$.

9) (Интеграл энергии) Доказать, что если L не зависит от t, а $\hat{x}$ — решение уравнения Эйлера, то функция

$$(\dot{x}L_{\dot{x}} - L)|_{x=\hat{x}}$$

постоянна.

10) (Вейерштрасс) Доказать, что экстремальная задача

$$\int_0^1 t^2\dot{x}^2\ dt \to extr, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$$

не имеет решения.

11) (Гильберт) Доказать, что решение экстремальной задачи

$$\int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2\ dt \to extr, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$$

не является непрерывно дифференцируемым.

В задачах 12)-13) найти решение уравнения Эйлера (используйте интеграл энергии)

12) (задача о брахистохроне)

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{x}}\ dt \mapsto extr,\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

13) (задача о минимальной поверхности вращения)

$$\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1 + \dot{x}^2}\ dt \mapsto extr,\ x(-T_0) = x(T_0) = \xi.$$

2. Лекция 2

(простейшая задача вариационного исчисления, продолжение)

Замечание 2.1. *Условие $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,t_1])$ можно опустить, если воспользоваться лемой Дюбуа-Раймона*

Лемма 2.2. *Пусть a_0, a_1 — непрерывны на $[0,1]$ и для любой $h \in C_0^1([t_0,t_1])$*

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(a_1(t)\dot{h}(t) + a_0(t)h(t) \Big)\, dt = 0.$$

Тогда a_1 непрерывно дифференцируема и

$$-\frac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0.$$

Доказательство: $\dot{p} = a_0$, $\int_{t_0}^{t_1} p dt = \int_{t_0}^{t_1} a_1 dt$. Имеем $\int_{t_0}^{t_1}(a_1\dot{h} + a_0 h)dt = \int_{t_0}^{t_1}(a_1 - p)\dot{h}dt$. Применяем к $h = \int_{t_0}^{t_1}(a_1 - p)dt$. Получаем $a_1 = p$.

Пример 2.3.

$$\int_0^1 \dot{x}^2\, dt \mapsto extr,\ x(0) = 1,\ x(1) = 0$$

Пример 2.4. *(Решение уравнения Эйлера не является точкой экстремума)*

$$\int_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \mapsto extr,\ x(0) = 0,\ x(3\pi/2) = 0.$$

Задача Больца

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to extr$$

Теорема 2.5. *Пусть $\hat{x}(\cdot)$ является слабым локальным экстремумом в задаче Больца. Пусть $L, L_x, L_{\dot{x}}$ непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика*

$$\Gamma_{\hat{x}\hat{x}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t) : t \in [t_0, t_1]\},$$

а функция l непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$. Тогда $\hat{L}_{\dot{x}}$ — непрерывно дифференцируемая функция на $[t_0,t_1]$ и

1) выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0.$$

2) условия трансверсальности

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)},\ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}.$$

Пример 2.6.

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to extr.$$

3. Лекции 3-4

Принцип множителей Лагранжа для конечномерных задач с ограничениями типа равенств

Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f_i : V \to \mathbb{R}$. Задача с ограничениями

$$f_0 \to extr,\ f_i = 0,\ 1 \le i \le n.$$

Понятие локального экстремума. Функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),\ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m).$$

Теорема 3.1. *Пусть f_i непрерывно дифференцируемы. Если $\hat{x}$ — точка локального экстремума, то существует такой ненулевой набор множителей Лагранжа, что*

$$\mathcal{L}_x(\hat{x},\lambda) = 0 \qquad (\partial_{x_i}\mathcal{L}(\hat{x},\lambda) = 0,\ \forall i).$$

Задача Лагранжа. Уравнения Эйлера-Лагранжа

Для заданных функций

$$f(t,x,u))\colon [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}$$
$$\varphi(t,x,u)\colon [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^n$$

$t \in [t_0,t_1],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r$ решить *задачу Лагранжа с закрепленными концами*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))\ dt \to extr,$$
$$\dot{x} = \varphi(t,x,u),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1.$$

x — фазовые переменные, u — управление. Пространство $Z = C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) \times C([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$. Норма

$$\|(x(\cdot),u(\cdot))\|_Z = \max(\|x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}, \|\dot{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}, \|u(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)}).$$

Понятие (слабого) экстремума. Функция Лагранжа $\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t),u(t))\ dt$, где

$$L(t,x,\dot{x},u) = \lambda_0 \cdot f(t,x,u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t,x,u)).$$

Теорема 3.2. *(Уравнения Эйлера-Лагранжа) Пусть $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ — экстремум задачи Лагранжа. Пусть $f, f_x, f_u, \varphi, \varphi_x, \varphi_u$ непрерывны в окрестности кривой $\{(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t) : t \in [t_0,t_1]\}$, то существуют такое число λ_0 и такая вектор-функция $p(\cdot) \in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ (не равные одновременно нулю), что на $[t_0,t_1]$ выполнены уравнения Эйлера по x и u:*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$$
$$\hat{L}_u(t) = 0.$$

Эти уравнения равносильны следующим:

$$\dot{p} = -p \cdot \hat{\varphi}_x(t) + \lambda_0 \hat{f}_x(t),\quad p(t) \cdot \hat{\varphi}_u(t) = \lambda_0 \hat{f}_u(t).$$

Замечание 3.3. *В случае свободного конца (условие $x(t_i) = x_i$ отсутствует) добавляется условие трансверсальности*

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = 0.$$

Пример 3.4.

$$\int_0^1 (x'' - x)^2\ dt \to extr,\quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$
$$\int_0^1 (x'')^2\ dt \to extr,\quad x(0) = x'(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Задачи 2

A) Найти решение задачи Больца или показать, что оно не существует

1) $\int_0^1(\dot{x}^2 - x)\ dt - \frac{x^2(1)}{2} \to extr$
2) $\int_0^1(\dot{x}^2 + x^2)\ dt - 2x(1)\operatorname{sh}(1) \to extr$
3) $\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^2 - x^2)dt + x^2(0) - x^2(\frac{\pi}{2}) + 4x(\frac{\pi}{2}) \to extr$
4) $\int_1^2 t^2\dot{x}^2\ dt - 2x(1) + x^2(2) \to extr$

B) Решить конечномерные задачи методом множителей Лагранжа

5) Среди дискретных случайных величин с n значениями найти случайную величину ξ с наибольшей энтропией $H(\xi) = \mathbb{E}\ln\frac{1}{\xi} = \sum_{i=1}^n p_i \ln\frac{1}{p_i}$.

6) Найдите максимальный возможный объём прямоугольной коробки, изготовленной из листа картона площади S.

7) Доказать неравенство (Гельдера)

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ 0 < p \le q \le \infty.$$

8) Завод собирает пылесосы Miele из китайских и немецких деталей. Число W собранных пылесосов задаётся функцией

$$W = 10a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}},$$

где a и b число комплектов китайских и немецких деталей, соответственно. Предположим, что комплект китайских деталей стоит 25$, а комплект немецких деталей стоит 50$. Найдите максимальное число пылесосов, которые можно собрать, если на комплекты деталей разрешается потратить не более 150$.

C) Выписать уравнения Эйлера-Лагранжа и найти решение экстремальных задач. Доказать, что полученное решение действительно является экстремумом.

9) $\int_0^\pi((x'')^2 - x^2) \to extr,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x(\pi) = 0,\ x'(\pi) = -1.$
10) $\int_1^e (t+1)t(x'')^2\ dt,\ x(1) = 0,\ x'(1) = 1,\ x(e) = e,\ x'(e) = 2.$

4. Лекция 5

Принцип максимума Понтрягина

Задача оптимального управления

$$f(t,x,u)) \colon [t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}$$
$$\varphi(t,x,u) \colon [t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^n$$

$t\in[t_0,t_1],\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^r,\ U\subset\mathbb{R}^r$.

Ищется минимум функционала

$$\mathcal{J}(x,u)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt$$

при условии

$$\dot{x}=\varphi(t,x,u), u\in U$$

и $x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1$ (последние условия соответствуют задаче с закрепленными концами). Пары (x,u), удовлетворяющие этим условиям, назовем допустимыми.

Задача рассматривается в пространстве $PC^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times PC([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$, т.е. x — кусочно дифференцируемое, а u — кусочно непрерывное отображение (для u и $\dot{x}$ допускается конечное число разрывов первого рода). Норма на этом пространстве такая же, как на $C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times C([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$.

Определение 4.1. *Допустимый процесс $(\hat{x},\hat{u})$ назовем* **сильным** *минимумом, если для некоторого $\varepsilon>0$ и любой допустимой пары (x,u), удовлетворяющей $\|x-\hat{x}\|_{C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$ выполнено неравенство $\mathcal{J}(x)\geq\mathcal{J}(\hat{x})$.*

Теорема 4.2. *(принцип максимума Понтрягина) Пусть $(\hat{x},\hat{u})$ — сильный минимум задачи оптимального управления. Если $f, f_x, \varphi, \varphi_x$ определены и непрерывны на множестве*

$$\{(t,x,u) : t\in[t_0,t_1],\ |x-\hat{x}(t)|<\varepsilon,\ u\in U\}$$

при некотором $\delta>0$, то существуют такие (множители Лагранжа) число λ_0 и $p\in PC^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, не равные одновременно нулю, что на отрезке $[t_0,t_1]$ выполнены уравнения Эйлера по x:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0$$

и условия минимума по u:

$$\min_u L(t,\hat{x}(t),u)=\hat{L}(t)$$

для любой точки t непрерывности функции $\hat{u}$.

Эти условия равносильны следующим:

$$\dot{p}=-p\cdot\hat{\varphi}_x(t)+\lambda_0\hat{f}_x(t),\quad \lambda_0 f(t,\hat{x}(t),u)-p(t)\cdot\varphi(t,\hat{x}(t),u)\geq\lambda_0\hat{f}(t)-p(t)\cdot\hat{\varphi}(t),\quad \forall u\in U.$$

Замечание 4.3. *В задаче со свободным концом (без граничного условия $x(t_1)=x_1$) выполнено еще условие трансверсальности*

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_1)=0.$$

Замечание 4.4. *Уравнение Эйлера и принцип максимума можно переписать в "гамильтоновой форме". Для функции Гамильтона*

$$H(t,x,p,u)=p\cdot\varphi(t,x,u)-\lambda_0 f(t,x,u)$$

они принимают вид

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$\max_u H(t,\hat{x}(t),p(t),u)=\hat{H}(t).$$

Пример 4.5.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin t\ dt\to extr,\quad |\dot{x}|\leq 1,\ x(-\pi)=x(\pi)=0.$$

5. Лекции 6-7

На этих лекциях разбирались аэродинамическая задача Ньютона и задача о быстродействии (см., например, гл. 8 в [1]).

Задачи 3

Принцип максимума Понтрягина. Изопериметрические задачи.

Применяя принцип максимума Понтрягина, найдите решение экстремальной задачи. Докажите, что полученное решение действительно является экстремумом.

1) $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\, dt \to extr,\ |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0$

2) $\int_0^1 x \to extr,\ |x''| \leq 2,\ x(0) + x(1) = 0, \dot{x}(0) + \dot{x}(1) = 0$

3) $T \to \min, |x''| \leq 2, x(-1) = 1,\ x(T) = -1, \dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0$

Решите изопериметрическую задачу

4) $\int_0^1 \dot{x}^2\ dt \to extr,\ \int_0^1 x\ dt = 3, x(0) = 1, x(1) = 6$

5) Энтропией $\mathrm{Ent}(\xi)$ случайной величины ξ с плотностью распределения ρ называется величина $\mathbb{E} \ln \rho(\xi) = \int \rho \ln \rho\ dx$ ($\mathrm{Ent}(\xi) = \infty$, если случайная величина не имеет плотности).

Рассмотрим задачу

$$\mathrm{Ent}(\xi) \to \inf,\ \mathbb{E}(\xi) = 0,\ D\xi = 1$$

($\mathbb{E}$ — математическое ожидание, D — дисперсия). Применяя принцип максимума Понтрягина докажите, что если ξ — решение этой задачи, то ξ имеет стандартное гауссовское распределение.

6) Сильный и слабый экстремум.

Напомним, что сильным называется локальный экстремум по норме $C([t_1, t_2])$, а слабым — локальный экстремум по норме $C^1([t_1, t_2])$. Докажите, что решение уравнения Эйлера дает слабый, но не сильный экстремум в задаче

$$\int_0^1 \dot{x}^2\ dt \to \inf,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

6. Лекция 8

Необходимые и достаточные условия второго порядка в простейшей вариационной задаче

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt \to \min; \quad x(t_0) = x_0; \quad x(t_1) = x_1.$$

Всюду далее $\hat{x}(t)$ — экстремаль (решение уравнений Эйлера), а интегранд $L(t, x, u)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемым в окрестности экстремали.

Сильный минимум: экстремаль $\hat{x} \in PC^1([t_0, t_1])$ доставляет сильный минимум, если существует такое число $\delta > 0$, для любой допустимой $x \in PC^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющей условию $\|x - \hat{x}\|_{C([t_0,t_1])} < \delta$, выполнено $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$.

Слабый минимум: экстремаль $\hat{x} \in C^1([t_0, t_1])$ доставляет слабый минимум, если существует такое число $\delta > 0$, для любой допустимой $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющей условию $\|x - \hat{x}\|_{C^1([t_0,t_1])} < \delta$, выполнено $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$.

Определение 6.1. *Точка τ называется сопряженной t_0, если существует решение уравнения*

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}h) + (\hat{L}_{\dot{x}x}\dot{h} + \hat{L}_{xx}h) = 0$$

$$h(t_0) = 0, \dot{h}(t_0) = 1, h(\tau) = 0.$$

Определение 6.2. *На экстремали $\hat{x}$ выполнено*

— условие Лежандра, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = L_{uu}(t, x, u)|_{x=\hat{x}, u=\dot{\hat{x}}} \geq 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ (усиленное условие Лежандра, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = L_{uu}(t, x, u)|_{x=\hat{x}, u=\dot{\hat{x}}} > 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$

— условие Якоби, если при дополнительном предположении усиленного условия Лежандра в $[t_0, t_1)$ нет точек, сопряженных с t_0 (усиленное условие Якоби, если при дополнительном предположении усиленного условия Лежандра в $[t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0)

— условие Вейерштрасса, если $\mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}(t), u) \geq 0$, где

$$\mathcal{E}(t, x, y, u) = L(t, x, u) - L(t, x, y) - L_u(t, x, y)(u - y)$$

– функция Вейерштрасса.

Несложно видеть, что если функция L глобально выпукла по u, то условия Лежандра и Вейерштрасса автоматически выполнены.

Сглаживание функций. Стандартным способом приближения негладкой функции гладкими являются приближения свертками с гладким быстро убывающим ядром (например, гауссовским): $f = \lim_{h \to 0} f_h$,

$$f_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2h^2}}\ dy.$$

Если f ограничена, то f_h бесконечно дифферецируемы. Если f при этом кусочно непрерыно дифференцируема, то производные f_h сходятся к производной f в точках непрерывности.

Для функций простого вида на прямой (типа модуля) иногда применяется более простой способ, заключающийся в явном сглаживании "углов". Например, $|t|$ можно приблизить непрерывно дифференцируемыми функциями $f_n(t)$ вида

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{nt^2}{2}, & \text{если } |t| \leq \frac{1}{n}, \\ |t| - \frac{1}{2n}, & \text{если } |t| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Теорема 6.3. *(необходимые условия) Пусть $\hat{x} \in C^2([t_0, t_1])$.*

1) если $\hat{x}$ — слабый минимум, то выполнены условия Лежандра и Якоби.

2) если $\hat{x}$ — сильный минимум, то выполнены условия Лежандра, Якоби и Вейерштрасса.

Доказательство. Докажем 2). Задача на сильный минимум эквивалентна задаче оптимального управления (вспомним, что в задачах оптимального управления мы рассматривали именно сильный минимум) $\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, u)\ dt \to \min$, $\dot{x} = u$. В силу принципа максимума

$$-\dot{p}(t) + \lambda_0 \hat{L}_x = 0, \quad p(t)u - \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), u) \leq p(t)\hat{x}(t) - \lambda_0 \hat{L}.$$

Так как $p(t)u - \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), u)$ достигает минимума в точке $\dot{\hat{x}}$, то производная по u в этой точке равна нулю. Следовательно $p(t) = \lambda_0 L_u(t, \hat{x}(t), u)|_{u=\dot{\hat{x}}} = \lambda_0 \hat{L}_{\dot{x}}$. Без ограничения общности считаем

$\lambda_0 = 1$. Поставим выражение для p неравенство, получаем $\hat{L}_{\dot{x}} u - L(t, \hat{x}(t), u) \le \hat{L}_{\dot{x}} \hat{x}(t) - \hat{L}$. Это и есть условие Вейерштрасса. Условие Лежандра следует из того, что $\dot{\hat{x}}$ — точка минимума функции $u \to p(t)u - \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), u)$, поэтому $L_{uu}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \ge 0$.

Осталось доказать, что при условии слабого минимума выполнены условия Лежандра и Якоби. Рассмотрим функционал $K(h) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x} + h, \dot{\hat{x}} + \dot{h})\ dt$, $h \in C_0^1[t_0, t_1]$. В силу того, что $\hat{x}$ является точкой слабого минимума, $K(h)$ достигает минимума в нуле (как функционал на $C_0^1([t_0, t_1])$). Разложим $K(\lambda \dot{h})$ по λ в окрестности нуля. В силу уравнений Эйлера $K'(0) = 0$. Поэтому $K''(0) \ge 0$. Следовательно

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} (\dot{h})^2\ dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}x} \dot{h} h\ dt + \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{xx} h^2\ dt \ge 0.$$

Пусть в точке τ нарушается условие Лежандра: $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) < 0$. Построим последовательность функций

$$h_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |t - \tau| \ge \frac{1}{2n}, \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} - \sqrt{n}|t - \tau|, & \text{если } |t - \tau| \le \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

Функции h_n равномерно стремятся к нулю, при этом $|\dot{h}_n|$ стремится к бесконечности, $h_n \dot{h}_n$ равномерно ограничено. Отсюда следует, что $K(h_n) < 0$ при достаточно больших n. Мы пришли к противоречию. Правда, можно заметить, что h_n не являются непрерывно дифференцируемыми. Но это обстоятельство легко устранить, если построить сглаживания h_n (например, простым сглаживанием углов) функциями $h_{n,\varepsilon}$. Достаточно найти такую непрерывно дифференцируемую функцию $h_{n,\varepsilon}$, что $|K(h_n) - K(h_{n,\varepsilon})| < \varepsilon$ (применяя теоремы о предельном переходе под знаком интеграла убедитесь, что при описанном способе приближения этого всегда можно добиться).

Докажем условие Якоби. Мы знаем, что $K(h) \ge 0$ в пространстве $C_0^1([t_0, t_1])$. Приближая функцию $h \in PC^1([t_0, t_1])$ гладкими, нетрудно убедиться, что $K(h) \ge 0$ в пространстве $PC_0^1([t_0, t_1])$. Поэтому K имеет глобальный (следовательно, сильный) минимум в $PC_0^1([t_0, t_1])$ при $h = 0$. Предположим, что условие Якоби нарушается и существует функция $\tilde{h}$, удовлетворяющая соответствующим уравнениям. Продолжим ее на весь отрезок, положив $\tilde{h}(t) = 0, t \ge \tau$. Заметим, что $K(\tilde{h}) = 0$. Действительно, интегрируя по частям с учетом краевых условий и уравнения Якоби получаем

$$K(\tilde{h}) = \int_{t_0}^{\tau} -\frac{d}{dt}\Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{\tilde{h}} + \hat{L}_{\dot{x}x} \tilde{h}\Big)\tilde{h} + \big(\hat{L}_{\dot{x}x} \dot{\tilde{h}} + \hat{L}_{xx} \tilde{h}\big)\tilde{h}\ dt = 0.$$

Следовательно, $\tilde{h}$ тоже является сильным минимумом. Как мы видели выше, соответствующий мнжитель Лагранжа имеет вид $p(t) = \hat{\tilde{L}}_{\dot{h}}$, где $\tilde{L}(h) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\dot{h})^2 + 2\hat{L}_{\dot{x}x} \dot{h} h + \hat{L}_{xx} h^2$. Следовательно $p = 2\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{\tilde{h}}$. Напомним, что для выполнения условия Якоби предполагается выполненным усиленное условие Лежандра, поэтому $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0$. Как нетрудно убедиться, $\dot{\tilde{h}}$ разрывна в точке τ (почему?). Но тогда разрывна функция p, что противоречит принципу максимума Понтрягина (напомним, что p должна принадлежать $PC^1([t_0, t_1])$). $\square$

Теорема 6.4. *(достаточные условия) Пусть $\hat{x}$ — экстремаль.*

1) Пусть выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда $\hat{x}$ — слабый минимум.

2) Если, кроме того, функция $L(t, x, u)$ выпукла по u для всех фиксированных (t, x), то $\hat{x}$ — сильный минимум.

Доказательство теоремы о достаточных условиях будет позже.

Пример 6.5. *Найти сильный и слабый минимум функционала $\int_0^T (\dot{x}^2 - x^2)\ dt$, $x(0) = 0, x(T) = 0$.*

Ответ: $x = 0$ при $T \le \pi$ — сильный минимум. При $T > \pi$ никакая из экстремалей на является экстремумом (есть сопряженные точки). При $T = \pi$ требуется дополнительное исследование.

Задачи 4

Необходимые и достаточные условия экстремума в простейшей вариационной задаче.
Выпуклый анализ.

С помощью условий Лежандра, Якоби и Вейерштрасса исследовать задачи на сильный и слабый экстремум.

1) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}((\dot{x})^2 - x^2 - 2x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x\big(\frac{3\pi}{2}\big) = 0$

2) $\int_0^1 \sin\dot{x}\,dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$

3) $\int_0^{T_0} \dot{x}e^{\dot{x}}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi$

Вычислить субдифференциалы выпуклых функций в нуле

4) $\max\{e^x, 1 - x\}$

5) $\sum_{i=1}^n |x_j|$

6) $\max_{j=1,\cdots,n} |x_j|$

Найти сопряженные к функциям

7) $\frac{|x|^p}{p}$, $p \geq 1$

8) e^{x-1}

9) $\max\{|x|, x^2\}$

10) $\max\{x_1, \cdots, x_n\}$

11) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая выпуклая функция, удовлетворяющая условиям $\det D^2 f > 0$ и $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$ (суперлинейность). Докажите, что сопряженная функция f^* удовлетворяет соотношениям

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y\rangle, \quad f(x) + f^*(\nabla f(x)) = \langle x, \nabla f(x)\rangle,$$

при этом отображение $x \to \nabla f(x)$ инъективно.

12) Докажите соотношение

$$(f \oplus g)^* = f^* + g^*,$$

где $f \oplus g(x) = \inf_{a+b=x}(f(a) + g(b))$.

13) (Формула Хопфа-Лакса-Олейник)

Пусть $u(t, x)$ — решение экстремальной задачи

$$u(t, x) = \inf \int_0^t L(\dot{x}(s))\,ds + g(x(0)),\ x(t) = x.$$

где g — гладкая функция с равномерно ограниченной производной, L — выпуклая функция, причем $\lim_{t\to\infty} L(t)/|t| = +\infty$.

1) Докажите, что гладкое решение этой задачи является решением уравнения в частных производных

$$u_t + H(u_x) = 0, \quad u(0, x) = g(x),$$

где $H = L^*$.

2) Докажите, что u имеет явное представление в виде

$$u(t, x) = \inf\Big\{tL\big(\frac{x - y}{t}\big) + g(y)\Big\}$$

Указание: вместо равенства докажите, что левая часть не превосходит правую и наоборот. Воспользуйтесь неравенством Иенсена.

7. Лекция 9

Выпуклые функции. Сопряженные функции.

X — нормированное пространство (вообще говоря, бесконечномерное), X^* — его сопряженное. Значение $x^* \in X$ на $x \in X$ обозначается символом $\langle x, x^* \rangle$. Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется выпуклой, если множество

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x),\ f(x) < \infty\}$$

выпукло.

Типичным примером выпуклой функции является функция

$$\delta_A = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$$

где A — выпуклое множество.

Следующая теорема является следствием теоремы Хана-Банаха. Доказательство можно найти, например, в курсе функционального анализа Колмогорова и Фомина.

Теорема 7.1. *Пусть A и B — выпуклые множества в X, $A \cap B = \emptyset$, $\operatorname{Int}(B) \neq \emptyset$. Тогда A и B отделимы, т.е. существует такой элемент $x^* \in X^*$, что $\sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle \leq \inf_{x \in B} \langle x, x^* \rangle$.*

Простым следствием является теорема о строгой отделимости.

Следствие 7.2. *Пусть A — выпуклое замкнутое множество, $x \notin A$. Тогда x и A строго отделимы, т.е. существует такой элемент $x^* \in X^*$, что $\sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle < \inf_{x \in B} \langle x, x^* \rangle$.*

Определение 7.3. *Субдифференциалом функции f называется множество*

$$\partial f(x) = \{x^* : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle, \quad \forall y \in X\}.$$

Упражнение 7.4. *Для $X = \mathbb{R}^n$ докажите, что если выпуклая функция f дифференцируема в точке x, то $\partial f(x)$ состоит из единственного элемента $\nabla f(x)$.*

Упражнение 7.5. *Докажите, что субдифференциалом функции $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ в нуле является множество $[-1, 1]$.*

Определение 7.6. *Сопряженной f^* к функции f называется функция*

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \big(\langle x, x^* \rangle - f(x) \big).$$

Упражнение 7.7. *Докажите, что для $f(x) = \frac{x^2}{2}$ выполено $f^* = f$.*

Докажите, что для $f(x) = |x|$, $g(x) = \delta_{[-1,1]}$ выполнено $f^* = g$, $g^* = f$.

Определение 7.8. *Функция f называется замкнутой, если $\operatorname{epi}(f)$ является замкнутым множеством.*

Теорема 7.9. *(Фенхеля-Моро о второй сопряженной функции). Следующие условия равносильны*

1) *функция f выпукла и замкнута*
2) *f является поточечным пределом аффинных функций $x \to \langle x, x^* \rangle + b$*
3) *$f = f^{**}$.*

Доказательство следующей теоремы несложно и может быть рекомендовано в качестве упражнения.

Теорема 7.10. *Для выпуклой замкнутой функции следующие условия равносильны.*

1) $x^* \in \partial f(x)$
2) $x \in \partial f^*(x^*)$
3) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$.

Следствие 7.11. *Если функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемы и отображения $x \to \nabla f(x)$, $y \to \nabla f^*(y)$ взаимно однозначные отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, то их градиенты взаимно обратны: $\nabla f^*(\nabla f(x)) = x$, $\nabla f(\nabla f^*(y)) = y$.*

Достаточные условия экстремума в простейшей вариационной задаче (продолжение). Уравнение Гамильтона-Якоби. Поле экстремалей. Формула Вейерштрасса.

Мы обсудим достаточные условия экстремума. Ниже будет вольно изложена основная конструкция доказательства. Более подробное изложение и полное обоснование см. в книгах [1], [2].

Будем предполагать, что L — гладкая функция и гессиан функции $L(t,x,\dot{x})$ по переменной $\dot{x}$:

$$L_{\dot{x}_i\dot{x}_j} > 0$$

является строго положительной матрицей в любой точке и $\lim_{|x|} L(x)/|x| = +\infty$ (мы не уточняем здесь, какой порядок гладкости достаточен, см. комментарии [2]).

Рассмотрим функцию $H = L^*$ (гамильтониан), являющуюся при фиксированных t, x сопряженной к L по переменной $\dot{x}$. В физической литературе это обычно формулируют так:

$$H(t,x,p) = \langle p, \dot{x} \rangle - L(t,x,\dot{x}), \tag{1}$$

где переменные p (импульс) и $\dot{x}$ (скорость) связаны соотношением

$$p = L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}).$$

Запишем уравнения Эйлера-Лагранжа $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0$ в новой системе переменных. Для этого заметим, что в силу определения p

$$dH = \dot{x}dp + pd\dot{x} - L_t dt - L_x dx - L_{\dot{x}}d\dot{x} = \dot{x}dp - L_t dt - L_x dx.$$

Поэтому

$$H_t = -L_t,\ H_x = -L_x,\ H_p = \dot{x}.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа примут вид (канонические уравнения)

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(t,x,p) \\ \dot{p} = -H_x(t,x,p). \end{cases}$$

Классический пример: N материальных точек массой m_i движутся под воздействием внешней силы, заданной своим потенциалом $U(x)$. Движение определяется как экстремаль функционала действия $\int_{t_0}^{t_1} L\ dt$, где $L = T - U$, где $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{x_i}^2}{2}$ — кинетическая энергия системы.

Тогда

$$H = \langle \dot{x}, L_{\dot{x}} \rangle - L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{x_i}^2}{2} + U = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U$$

— полная энергия системы, а

$$p_i = m_i \dot{x_i}$$

импульс. Канонические уравнения принимают вид

$$\begin{cases} m\dot{x}_i = p_i \\ \dot{p}_i = -U_{x_i}. \end{cases}$$

Второе уравнение есть не что иное, как закон Ньютона.

Доказательство достаточности условий для простейшей вариационной задачи опирается на технику дифференциальных форм. Рассмотрим форму Пуанкаре-Картана $\omega(x,p,t)$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - Hdt.$$

Лемма 8.1. *Для любого вектора η имеем*

$$d\omega(\xi,\eta) = 0,$$

где $\xi = (H_{p_1}, \cdots, H_{p_n}, -H_{x_1}, \cdots, -H_{x_n}, 1)$

Доказательство. $d\omega(\xi,\eta) = \langle A\xi, \eta \rangle$, где A — некоторая антисимметрическая матрица. Проверьте с помощью явных вычислений, что $A\xi = 0$. □

Зафиксируем (t_0, x_0) и проведем через каждую точку (t_0, x_0, p) интегральную кривую векторного поля ξ, кривую $t \to (x(t), p(t), t)$, где $(x(t), p(t))$ — решение уравнения

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x$$

с соответствующими начальными условиями $x(t_0) = x_0,\ p(t_0) = p$. Т.е., в силу изложенного выше, $t \to (x(t), p(t))$ — решение канонических уравнений, определяющее некоторую экстремаль $x(t)$. Полученное $n+1$ мерное многообразие обозначим M_{t_0,x_0}. Из предыдущей леммы сразу следует, что форма $d\omega$ зануляется на касательном пространстве к M_{t_0,x_0}.

Докажем теперь, что интеграл по любому гладкому замкнутому контуру $\gamma_1 \subset M$ от ω равен нулю. Для этого построим **трубку траекторий**, охватывающую этот контур, т.е. через каждую точку контура γ_1 проведем интегральную кривую $(x(t), p(t))$. Пусть теперь γ_2 — другой контур, охватывающий эту трубку, причем $\gamma_1 \cup \gamma_2$ является (ориентированной) границей некоторого двумерного многообразия $\mathcal{M}$ По формуле Стокса

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega = 0.$$

Последнее выражение равно нулю, потому что касательное пространство к $\mathcal{M}$ двумерно и содержит вектор, зануляющий $d\omega$ (а также кососимметричности $d\omega$). Следовательно, интеграл $\int_\gamma \omega$ не меняется вдоль гладкого сдвига γ по траекториям интегральных кривых. Так как все интегральные кривые имеют начало в некоторой точке (t_0, x_0, p), сдвинем γ вдоль трубки траекторий в подпространство $P_{t_0x_0} = \{(t_0, x_0, p)\}$. В результате этой деформации получится контур $\tilde{\gamma} \subset P_{t_0x_0}$, причем $\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$. Осталость заметить, что последний интеграл равен нулю, потому что $d\omega = 0$ на P_{t_0,x_0} (в силу того, что ω не содержит dp_i, а dt, dx_i равны нулю на $P_{t_0x_0}$).

Пусть теперь $D \subset M_{t_0,x_0}$ — односвязная область, причем проекция D на некоторую область G в подпространстве $p = 0$ взаимно однозначна. Будем говорить, что тогда в G задано **центральное поле экстремалей с центром в точке** (x_0, t_0). Тогда M_{t_0,x_0} задается как график функции $p(t, x)$ на G. В силу того, что $d\omega = 0$ на касательном пространстве к M_{t_0,x_0}, форма

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t, x) dx_i - H(t, x, p(t, x)) dt,$$

являющейся образом ω при этой проекции, также является замкнутой в G: $d\tilde{\omega} = 0$ в G.

Отсюда следует, что $\tilde{\omega}$ точна, т.е. $\tilde{\omega} = dS$ для некоторой функции $S(t, x)$. Следовательно,

$$S_t = -H(t, x, p(t, x)), \ S_{x_i} = p_i(t, x).$$

Таким образом, S является решением следующего уравнения **(уравнение Гамильтона-Якоби)**

$$S_t = -H(t, x, S_x).$$

Как хорошо известно, S можно записать в виде

$$S(t_1, x_1) = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} p_i(t, x) dx_i - H(t, x, p(t, x)) dt.$$

Здесь γ – некоторый (произвольный!) путь в G, соединяющий (t_0, x_0) и (t_1, x_1). Выразим S через интеграл от функции L. Найдем функцию $u(t, x)$ из соотношения $u(t, x) = H_p(t, x, p(t, x))$. В силу того, что L и H сопряжены, их градиенты взаимно обратны, поэтому $p(t, x) = L_{\dot{x}}(t, x, u(t, x))$. Тогда $S(t_1, x_1) = I(\gamma)$, где

$$I(\gamma) = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} p_i(t, x) dx_i - H(t, x, p(t, x)) dt.$$

В силу формулы (1) последнее выражение равно

$$I(\gamma) = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} L_{\dot{x}_i}(t, x, u(t, x))\ dx_i - \Big(- L(t, x, u(t, x)) + \langle L_{\dot{x}}(t, x, u(t, x)), u(t, x) \rangle \Big) dt. \qquad (2)$$

Заметим еще раз, что результат не зависит от пути интегрирования. Пусть теперь x — решение уравнения $\dot{x} = u(t, x) = H_p(t, x, p(t, x))$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, (т.е. $x(t)$ — экстремаль). Из (2) получаем

$$S(t_1, x_1) = \int_\gamma L(t, x, u(t, x))\ dt = \int_\gamma L(t, x, \dot{x})\ dt.$$

Получаем важный вывод: $S(t,x)$ совпадает со значением функционала действия

$$\mathcal{L}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\ dt$$

на экстремалях.

Ниже нам понадобится формулировка многомерного условия Якоби. Для этого достаточно дать определение сопряженной точки.

Определение 8.2. *Точка τ называется сопряженной t_0, если существует решение уравнения*

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{x\dot{x}}^T h) + (\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{xx}h) = 0$$
$$h(t_0) = 0, \dot{h}(t_0) = 1, h(\tau) = 0.$$

Здесь $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}$, $\hat{L}_{x\dot{x}}$, $\hat{L}_{xx}$ — соответствующие матрицы вторых производных.

Теорема 8.3. *(Достаточное условие сильного минимума в терминах поля экстремалей) Пусть в G задано центральное поле экстремалей и функция Вейерштрасса*

$$L(t,x,\xi) - L(t,x,u(t,x)) - p(t,x)(\xi - u(t,x))$$

неотрицательна при всех $(t,x) \in G$ и любых ξ. Пусть $\hat{x}(\cdot)$ — некоторая экстремаль. Тогда для любой кривой $x(\cdot)$, удовлетворяющей условиям $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$, $x(t) \in G$ имеет место неравенство

$$\mathcal{L}(x(\cdot)) \geq \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot)),$$

где $\mathcal{L}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\ dt$.

Доказательство. Имеем равенство $I(\hat{x}(\cdot)) = I(x(\cdot))$ (т.к. концы кривых совпадают). Так как $\hat{x}$ — экстремаль, то $I(\hat{x}(\cdot)) = \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot))$. Поэтому в силу (2) выполнена **основная формула Вейерштрасса**

$$\mathcal{L}(x(\cdot)) - \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot)) = \mathcal{L}(x(\cdot)) - I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(L(t,x,\dot{x}) - L(t,x,u(t,x)) - L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(\dot{x}(t) - u(t,x))\Big)\ dt \geq 0.$$

□

Таким образом, решение задачи на сильный экстремум единственно при наличии центрального поля экстремалей и неотрицательности функции Вейерштрассса. Для доказательства единственности в терминах одной экстремали достаточно вложить эту экстремаль в центральное поле. Последнее можно сделать при помощи теоремы о неявной функции.

Лемма 8.4. *(о погружении) Пусть на эстремали $\hat{x}$ выполнены усиленные условие Лежандра и Якоби. Тогда для любого $t_0 < \tilde{t}_0 < t_1$ существует центральное поле экстремалей, окружающее множество $\{t, \hat{x}(t)\}$, $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_1$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что некоторая окрестность многообразия M_{t_0,x_0}, содержащая экстремаль $\hat{x}$, $\hat{x}(t_0) = x_0$ взаимно однозначно проектируется на подпространство (t,x). Для этого достаточно проверить, что матрица Якоби отображения $\pi : (t, x(t,p_0), p(t,p_0))$ невырожден по переменным p_0. Заметим, что матрица Якоби $W = (\frac{\partial \hat{x}}{\partial p_0})$ является решением (**многомерного!**) матричного уравнения Якоби. Действительно, каждая экстремаль $x(t,p_0)$ является решением системы уравнений Лагранжа

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) + L_x(t,x,\dot{x}).$$

Продифференцировав уравнение по p_0 (начальным данным), получаем матричное уравнение Якоби

$$-\frac{d}{dt}\Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{W} + \hat{L}_{x\dot{x}}^T W\Big) + \Big(\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{W} + \hat{L}_{xx}W\Big) = 0,$$

где T обозначает транспонирование.

Очевидно, $W(t_0) = 0$ (т.к. $x(t_0) = x_0$ не зависит от p_0). Из $p = L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$ получаем

$$\frac{\partial p}{\partial p_0} = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{W} + \hat{L}_{x\dot{x}}^T W.$$

Следовательно, в точке t_0 с учетом $W(t_0) = 0$ имеем: $I = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0)\dot{W}(t_0)$. В силу усиленного условия Лежандра матрица $\dot{W}(t_0)$ обладает обратной. Отсутствие сопряженных точек влечет невырожденность $W(t)$ для всех значений $t \in (t_0, t_1]$ (см. упражнения). По теореме о неявной функции каждая точка $\{t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)\}$ обладает окрестностью, взаимно однозначно проектирующейся на (t, x). Объединение этих окрестностей дает искомое решение. $\square$

Идея доказательства теоремы 6.4. В предыдущей лемме мы фактически построили искомое центральной поле экстремалей в окрестности произвольной точки отрезка. Исключение составляет сама начальная точка (t_0, x_0), в которой $W(t_0) = 0$. Для борьбы с этим явлением применяется некоторый трюк (лемма об отступлении), суть которого состоит в том, чтобы продолжить экстремаль $\hat{x}$ на отрезок $(t_0 - \delta, t_1]$, и, доказав отсутствие сопряженных точек, вложить это решение в центральное поле экстремалей, как это делалось в предыдущей лемме (детали см. в [1], [2]).

Из формулы Вейерштрасса сразу следует достаточность заявленных условий для случая сильного максимума. Для случая слабого максимума достаточно заметить, что достаточность следует из того, что подынтегральная функция неотрицательна на x близких к $\hat{u}$ по норме $C^1([t_0, t_1])$ и того, что $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}$ строго больше нуля (следовательно, имеет место "локальная" выпуклость L).

Задачи 5

Двойственность. Уравнение Якоби. Геодезические. Сопряженные точки.

1) Найдите минимум выпуклых функций
1.1 $x^2 + y^2 + 4\max(x, y)$
1.2 $x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

2) Опорной функцией p к замкнутому выпуклому множеству A называется функция $p_A(y) = \sup\{\langle x, y\rangle,\ x \in A\}$. Докажите, что $p_A = \delta_A^*$.

3*) Пусть A — компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂A и ненулевой кривизной k в каждой точке, $H(\theta) = p_A(\cos\theta, \sin\theta)$ — его опорная функция, суженная на окружность $S^1 = \{\cos\theta, \sin\theta\}$ радиуса 1. Используя аппарат теории двойственности,

3.1) докажите, что нормальное отображение $N(x) : x \to n(x)$ ($x \in \partial A$, $n(x)$ — нормаль к ∂A в точке x) границы ∂A в окружность S^1 является обратным к отображению

$$\theta \to H(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + H'(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta).$$

3.2) выразите k через H.

3.3) докажите частный случай теоремы Гаусса: $\int_{\partial A} k\ dl = 2\pi$.

4) Докажите, что следующее определение сопряженной точки равносильно данному ранее.

Рассмотрим матричное уравнение Якоби

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{U} + \hat{L}^T_{x\dot{x}}U) + (\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{U} + \hat{L}_{xx}U) = 0,$$

где U — матрица $n \times n$, удовлетворяющая начальным условиям

$$U(t_0) = 0,\ \dot{U}(t_0) = \mathrm{Id}.$$

Точка τ называется сопряженной с t_0, если $\det U(\tau) = 0$.

5) Напомним, что геодезической на римановом многообразии с метрикой g_{ij} называется экстремаль функционала

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x(t))\dot{x}_i\dot{x}_j}\ dt.$$

5.1) Найдите геодезические на сфере $x = \cos\varphi\cos\psi, \quad y = \sin\varphi\cos\psi, \quad z = \sin\psi$

5.2) Как устроена пара сопряженных точек на геодезической на сфере?

6) (Свойства уравнения Якоби и теоремы сравнения) Рассмотрим простейшее уравнение Якоби $\ddot{J} + R(t)J(t) = 0$ при $t \in [0, 1]$. Здесь J и R — матрицы $n \times n$. Предположим, что R симметрична. Пусть на $[0, 1]$ выполнено $\det J \neq 0$

1) Докажите, что если $\dot{J}(0)J^{-1}(0)$ — симметричная матрица, то такова же $\dot{J}(t)J^{-1}(t)$ при всех t

2) Докажите, что функция $\varphi(t) = -\log\det J(t)$, где $J(0) = I$, $J'(0)$ — симметричная матрица, удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\ddot{\varphi} \geq \frac{1}{n}(\dot{\varphi})^2 + \mathrm{Tr}(R).$$

7*) (Якобиевы поля) Уравнение Якоби возникает в римановой геометрии как дифференциальное уравнение на вариации геодезических.

Докажите следующее соотношение. Пусть $\gamma_s(t)$, $t \in [0, 1]$, $s \in [0, \varepsilon]$ — гладкое семейство геодезических на римановом многообразии M с метрикой g_{ij}. Положим $J(t) = \frac{d}{ds}\gamma_s|_{s=0}$ — векторное поле вдоль геодезической $\gamma = \gamma_0$. Предположим, что $x(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ — задание $\gamma(t)$ в координатах. Тогда

$$\nabla^2_{\dot{x}} J^i + R^i_{jkl}\dot{x}^j\dot{x}^k J^l = 0,$$

где $\nabla^2_{\dot{x}}$ — вторая ковариантная производная вдоль γ, R^i_{jkl} — тензор Римана.

Список литературы

[1] "Оптимальное управление", Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В. и др. МЦНМО, 2008.
[2] "Теория экстремальных задач", Тихомиров В.М., Иоффе А.Д. М.: Наука, 1979.
[3] "Оптимальное управление", Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Теория. Примеры. Задачи. Изд. 2-е, перераб. и доп. - М. : Физматлит, 2005.
[4] "Сборник задач по оптимизации", Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Наука, 1974.