Теория вероятностей. Листок 6.

Последняя возможность сдать задачи по листкам 5-6 **устно** будет на **1-2** парах 16 декабря!!!

Условные математические ожидания. Марковские цепи.

1) Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра измеримых множеств. Доказать, что для $p \in [1, \infty]$ отображение $\xi \to \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$, где ξ — случайная величина, принадлежащая $L^p(P)$ (с конечным p-м моментом), задает линейный оператор нормы 1 в пространстве $L^p(P)$. Если $p = 2$, то этот оператор является ортогональным проектором в $L^2(P)$.
2) Пусть $P = \rho(r)\ dxdy$ — вероятностная мера на плоскости, инвариантная относительно вращений. Найдите формулы для вычисления условного математического ожидания $\mathbb{E}(f(x,y)|\mathcal{F})$ от произвольной ограниченной измеримой функции $f(x,y)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденной функцией 1) $r = \sqrt{x^2+y^2}$, 2) $\frac{x}{y}$.

Всюду далее $\mathbb{E}(\eta|\xi) := \mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_\xi)$ обозначает условное математическое ожидание относительно σ-алгебры, порожденной ξ.

3) Пусть ξ, η — независимые показательные случайные величины с параметром 1. Найти формулу для условного математического ожидания $\mathbb{E}(f(\xi,\eta)|\xi+\eta)$.
4) Рассматривается n независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин. Назовем очередью последовательность из гербов (решеток), не включенную в последовательность гербов (решеток) большей длины. Например, последовательность ГГРГГРРГ содержит 5 очередей. Найти математическое ожидание числа очередей. Указание: запишите реккурентное соотношение для этого мат. ожидания.
5) Пусть $\{X_n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Какие последовательноси являются марковскими? Найти переходные вероятности для тех из них, которые являются марковскими. 1) $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 2) $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$, 3) $L_n = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$, 4) $K_n = X_n + X_{n-1}$.
6) В библиотеке разрешено иметь на руках не более одной книги. Каждое воскресенье я иду в библиотеку и либо беру новую книгу, либо продлеваю старую (если ее еще не прочитал). Книга с номером r требует W_r недель для чтения, где W_r — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть X_n — число продлений книги, с которой я выхожу из библиотеки в n-е воскресенье. Доказать, что $\{X_n\}$ — марковская цепь и найти матрицу переходных вероятностей.
7) A, B, C играют в теннис. Сначала играют двое, потом победитель играет в следующей игре с третьим участником и так далее. Вероятность победы в партии x против y равна $S_x/(S_x+S_y)$ (S_A, S_B, S_C — некоторые положительные числа). Найти вероятность того, что в четвертой игре будут играть те же, кто играл в первой. Покажите, что эта вероятность не зависит от состава игроков первой партии.
8) Вирус может находится в N состояниях. За единицу времени он с вероятностью $1-\alpha$ сохраняет свое состояние, а в любое другое переходит с вероятностью $\alpha/(N-1)$. Какова вероятность, что через n единиц времени он сохранит свое состояние?