Листок 6. Операторы момента импульса

1. Три компоненты оператора момента импульса квантовой частицы в декартовых координатах задаются равенствами

$$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1,$$

где x_i и p_i являются операторами декартовых координат и компонент импульса частицы соответственно. Выразите операторы L_i в сферических координатах и найдите выражение в сферических координатах для квадрата оператора момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2.$$

2. Рассмотрим переход к сферическим координатам в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$x_1 = r\cos\phi\sin\theta, \quad x_2 = r\sin\phi\sin\theta, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

   (a) Докажите, что оператор $-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$ не является эрмитовым в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, не может рассматриваться как канонически сопряженный радиальной координате r, несмотря на выполнение соотношения

$$[r, -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}\,] = i\hbar\,1.$$

   (b) В пространстве квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{R}^3$ найдите *эрмитов* оператор p_r, канонически сопряженный радиальной координате r:

$$[r, p_r] = i\hbar\,1, \quad p_r^\dagger = p_r.$$

   (c) Докажите, что эрмитов оператор p_r не является самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ и не имеет там самосопряженного расширения (воспользуйтесь теоремой об индексах дефекта эрмитового оператора, сформулированной в задаче 1-d Листка 5)

   (d) Выразите оператор p_r через декартовые компоненты импульса и декартовы координаты частицы, и покажите, что p_r есть эрмитов оператор, отвечающий классичекому выражению для радиальной компоненты импульса

$$\frac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{r},$$

   где $\bar{p}\cdot\bar{r}$ есть скалярное произведение классического импульса и радиус-вектора частицы.

3. Выразите оператор кинетической энергии квантовой частицы в трехмерном пространстве в сферических координатах. Пользуясь результатами задач 1 и 2 докажите равенство

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{L^2}{r}\right),$$

где L^2 — квадрат момента импульса квантовой частицы.

4. Ротатором называется система двух материальных точек, массой m_1 и m_2, связанных жестким прямолинейным невесомым стержнем длины l.

(a) Докажите, что в отсутствие внешних полей гамильтониан ротатора в системе отсчета, связанной с его центром масс, задается формулой

$$H = \frac{L^2}{2I},$$

где L^2 и I есть, соответственно, квадрат полного момента импульса ротатора и момент инерции относительно его центра масс:

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, l^2.$$

(b) Найдите уровни энергии и стационарные волновые функции пространственного ротатора, заданного гамильтонианом из предыдущего пункта. Какова кратность вырождения уровней энергии?

5. Введем понятие скалярного и векторного оператора (наблюдаемой). Оператор S называется *скалярным*, если он коммутирует с компонентами углового момента:

$$[L_a, S] = 0, \quad a = 1, 2, 3.$$

Три оператора V_i называются компонентами *векторного* оператора $\bar{V}$, если выпоннены следующие соотношения коммутации с компонентами углового момента:

$$[L_a, V_b] = i\epsilon_{abc} V_c,$$

где ϵ_{abc} — компоненты полностью антисимметричного тензора третьего ранга и по повторяющемуся индексу производится суммирование.

(a) Докажите, что декартовы компоненты координат x_i и импульса p_i квантовой частицы являются компонентами векторных операторов, а операторы r^2, p^2 и $\bar{r} \cdot \bar{p}$ являются скалярными.

(b) Пусть $\psi_{l,m}$ является собственным вектором операторов L^2 и L_3 с собственными значениями $l(l+1)$ и m соответственно. Докажите, что матричные элементы любого скалярного оператора S по векторам $\psi_{l,m}$ имеют вид:

$$(\psi_{l,m}, S\psi_{l,m'}) = \delta_{mm'} s(l),$$

где $\delta_{mm'}$ есть символ Кронекера, а "приведенный матричный элемент"$s(l)$ определяется конкретным видом оператора S и не зависит от квантового числа m.

(c) Докажите, что матричные элементы компонент любого векторного оператора имеют вид

$$(\psi_{l,m}, V_k \psi_{l,m'}) = v(l)(\psi_{l,m}, L_k \psi_{l,m'}), \quad k = 1, 2, 3.$$

В частности, для V_3 имеем

$$(\psi_{l,m}, V_3 \psi_{l,m'}) = v(l) m \delta_{mm'}.$$

Здесь приведенный матричный элемент $v(l)$ один и тот же для всех трех компонент оператора $\bar{V}$ и не зависит от квантового числа m

Приведенные в пунктах b) и c) утверждения являются частными случаями так называемой теоремы Вигнера-Эккарта для тензорных операторов. Эта теорема имеет большое значение для работы с конкретными квантовыми системами, особенно в случаях, когда точная структура тензорных операторов не известна.

6. Квантовая система находится в чистом состоянии $\psi_{l,m}$, вектор которого является собственным для оператора квадрата углового момента L^2 и его третьей компоненты L_3 с собственными значениями $l(l+1)$ и m соответственно. Найдите среднее значение проекции вектора момента импульса на ось, составляющую угол α с третьей осью системы координат.