Вводная лекция

1 Релятивистская инвариантность

2 Электромагнитное поле

3 Скалярное поле, лагранжианы

4 Электромагнитное поле. Волны

5 Запаздывающие потенциалы

6 Энергия и импульс в теории поля

7 Взаимодействующие скалярные поля

8 Скалярная электродинамика

9 Топологические решения в теории поля

9.1 Вещественное скалярное поле: кинк

В модели вещественного скалярного поля с “двухямным” потенциалом

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - a^2)^2 = -\frac{1}{2}\, m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\, q^2\phi^4 + \mathrm{const} \tag{9.1}$$

(где введены обозначения $\lambda = 2q^2$, $m^2 = \lambda a^2$) имееется точное решение типа “кинка”

$$\phi(x,t) = \pm\frac{m}{\sqrt{2}\, q}\ \tanh\frac{m(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{9.2}$$

движущегося с произвольной (!) скоростью v. Заметим, что в сопутствующей системе отсчета $\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \to x$ это решение вообще не зависит от времени, и обладает разными асимптотиками

$$\phi(x) = \pm\frac{m}{\sqrt{2}\,q}\,\tanh mx \underset{x\to\pm\infty}{\to} \pm\frac{m}{\sqrt{2}\,q} = \pm a \tag{9.3}$$

на $-\infty$ и $+\infty$, т.е. связывает два вакуума $\phi_0 = \pm a$, интерполируя между ними при изменении координаты x.

- Решение, скажем со знаком "+" в (9.2), называют кинком, а со знаком "-" - анти-кинком. В 1+1 мерной теории их можно различать *топологическим* зарядом

  $$Q = \frac{1}{2a}\left(\phi(\infty) - \phi(-\infty)\right) = \frac{q}{\sqrt{2}m}\int_{-\infty}^{\infty} dx\partial_x\phi \tag{9.4}$$

  отвечающему сохраняющемуся тождественно (даже не на уравнениях движения) ($\partial_\mu J^\mu \equiv 0$) току $J^\mu = \frac{q}{\sqrt{2}m}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$, или отображениям $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}_2$. В многомерных ($2+1$, $3+1$ и т.п.) теориях такие решения называют "стенками" (с бесконечной энергией и т.п.).

- Центр кинка можно произвольным образом сдвигать $\tanh mx \to \tanh m(x - x_0)$, от положения центра ничего не зависит. Такой эффект обычно называется наличием "нулевой моды".

9.2 Комплексное поле: топологический заряд

Аналогично, можно посмотреть на конфигурации комплексного скалярного поля, зависящие только от двух пространственных координат $\{x_I\} = (x, y)$, для которых действие представимо в виде

$$S = -\int dtdz\ T \tag{9.5}$$

где T иногда называют натяжением струны.

Для комплексного скалярного поля с потенциалом Гинзбурга-Ландау

$$T = \int d^2\mathsf{x}\left(\sum_{I=1,2}\partial_I\bar{\phi}\partial_I\phi + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2\right) \tag{9.6}$$

тоже можно ввести топологический заряд. Вспомним, что пространство вакуумов в такой теории описывается формулой

$$\phi_0 = a e^{i\vartheta}, \qquad 0 \le \vartheta < 2\pi \tag{9.7}$$

т.е. представляет собой окружность $\mathbb{S}^1_\vartheta$. Разумные граничные условия на пространственной бесконечности

$$\phi(x,y) \underset{r\to\infty}{\to} \phi_0(\vartheta) \tag{9.8}$$

при которых $V = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 \underset{r\to\infty}{\to} 0$, но не обязательно к одному и тому же по всем направлениям. При этом можно считать, что (9.8) задаёт отображение окружностей ($\{\mathbb{S}^1_\theta : x^2 + y^2 = R^2 \gg 1\}$)

$$\mathbb{S}^1_\theta \to \mathbb{S}^1_\vartheta \tag{9.9}$$

являющееся отображением окружности на пространственной бесконечности $\mathbb{S}^1_\theta$ в группу симметрии $U(1)$ (окружность $\mathbb{S}^1_\vartheta$), которое можно описать числом намоток

$$Q = \frac{1}{2\pi i a^2} \oint_{\mathbb{S}^1_\theta} dx_I \bar{\phi} \partial_I \phi \ \in \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{S}^1_\vartheta) \tag{9.10}$$

Существенно, что конфигурации с разными значениями Q нельзя перевести друг в друга малыми деформациями полей.

9.3 Вихрь Абрикосова

Если фаза $\vartheta = \vartheta(\theta) = \vartheta(x,y)$ зависит от координат пространства-времени, то естественно рассматривать калибровочную теорию комплексного скалярного поля, в которой имеется локальная фазовая или калибровочная инвариантность, в которой натяжение (редуцированное действие) имеет вид

$$T = \int d^2\mathsf{x} \left(\sum_{I=1,2} \bar{\nabla}_I \bar{\phi} \nabla_I \phi + V(|\phi|) + \tfrac{1}{2} F^2 \right) \tag{9.11}$$

($F \equiv F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$). Проще всего изучить частный случай, когда две независимые константы взаимодействия связаны условием

$$\lambda = 2q^2, \qquad m_H = \sqrt{\lambda} a = \sqrt{2} q a = m_V \tag{9.12}$$

Заметим, для начала, что (с точностью до полных производных)

$$
\begin{gathered}
|\nabla_1\phi + i\nabla_2\phi|^2 \simeq \sum_{I=1,2} |\nabla_I\phi|^2 - qF|\phi|^2 \\
\tfrac{1}{2}\left(F + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(|\phi|^2 - a^2)\right)^2 = \\
= \tfrac{1}{2}F^2 + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}F(|\phi|^2 - a^2)
\end{gathered}
\tag{9.13}
$$

Таким образом

$$
\begin{gathered}
T = \int d^2\mathsf{x}\left(\sum_{I=1,2} \bar{\nabla}_I\bar{\phi}\nabla_I\phi + V(|\phi|) + \tfrac{1}{2}F^2\right) = \\
= \int d^2\mathsf{x}\left[|\nabla_1\phi + i\nabla_2\phi|^2 + \tfrac{1}{2}\left(F + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(|\phi|^2 - a^2)\right)^2\right] + \\
+ \left(q - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\int d^2\mathsf{x}\ F|\phi|^2 + a^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int d^2\mathsf{x}\ F
\end{gathered}
\tag{9.14}
$$

или просто $T = qa^2\int d^2\mathsf{x}\ F$ (пропорционально магнитному потоку), если выполняется условие (9.12), и поля удовлетворяют системе уравнений первого порядка (так называемых БПС-уравнений)

$$
\begin{gathered}
(\nabla_1 + i\nabla_2)\phi = 0 \\
F + q(|\phi|^2 - a^2) = 0
\end{gathered}
\tag{9.15}
$$

Решение этих уравнений можно искать в виде

$$
\begin{gathered}
\phi = e^{i\theta}\varphi(r) \\
A_I = \frac{1}{q}\partial_I\theta(1 - f(r))
\end{gathered}
\tag{9.16}
$$

где (r,θ)-полярные координаты в (x,y)-плоскости.

Посмотрим на граничные условия: на бесконечности $r \to \infty$

$$
\phi \underset{r\to\infty}{\to} e^{i\theta}\varphi(\infty) = ae^{i\vartheta} = \phi_0 \tag{9.17}
$$

при $\varphi(\infty) = a$, $\vartheta = \theta$ (отображение $\mathbb{S}^1_\theta \to \mathbb{S}^1_\vartheta$ с топологическим зарядом $Q = 1$). Что касается калибровочного поля, то

$$A_I \underset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{q}\partial_I\theta \tag{9.18}$$

при естественном $f(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0$, выглядит как чистая калибровка, но таковой не является: $\oint A_I dx_I = 2\pi/q$. Напряженность поля при этом

$$F = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\frac{1}{qr}f'(r) \tag{9.19}$$

а магнитный поток

$$q\int d^2\mathsf{x}\ F = -2\pi\int_0^\infty rdr\frac{1}{r}f'(r) = 2\pi f(0) \tag{9.20}$$

при разумном условии $f(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0$. Для отсутствия сингулярности при $r = 0$ нужно потребовать $f(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$, таким образом натяжение

$$T = qa^2\int d^2\mathsf{x}F = 2\pi a^2 f(0) = 2\pi a^2 \tag{9.21}$$

а условие (9.20) можно интерпретировать как квантование магнитного потока (или заряда - по Дираку).

Уравнения (9.15) при такой подстановке превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} r\frac{d\varphi}{dr} - f\varphi = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - q^2(\varphi^2 - a^2) = 0 \end{gathered} \tag{9.22}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} \varphi(0) = 0, \qquad f(0) = 1 \\ \varphi(r) \underset{r\to\infty}{\to} a, \quad f(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0 \end{gathered} \tag{9.23}$$

- Легко понять, что эта система уравнений имеет решение с профильными функциями $\varphi(r)$, $f(r)$, удовлетворяющими заданным граничным условиям. Это решение называется (БПС, $Q = 1$) абрикосовским вихрем в модели Гинзбурга-Ландау или струной Нильсена-Олесена.

- Легко найти БПС решение с произвольным $Q \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что при этом, например,
$$\phi = e^{iQ\theta}\varphi(r), \quad f(0) = Q, \quad T = 2\pi a^2 Q \tag{9.24}$$
т.е. в данном случае топологический заряд совпадает с магнитным.

- Абрикосовские вихри существуют, конечно, и при нарушении БПС-условия $\lambda = 2q^2$, т.е. при $m_H \neq m_V$, но при этом профильные функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений второго порядка, возникающих из уравнений движения. Асимптотики на бесконечности БПС решений
$$\varphi(r) \underset{r\to\infty}{\sim} a\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{r}}e^{-mr}\right), \quad f(r) \underset{r\to\infty}{\sim} m\xi\sqrt{r}e^{-mr} \tag{9.25}$$
определяются $m_H = m_v = m = \sqrt{2}qa$, в общем случае эти экспоненты различны
$$\varphi(r) \underset{r\to\infty}{\sim} a\left(1 - \frac{\xi_H}{\sqrt{r}}e^{-m_H r}\right), \quad f(r) \underset{r\to\infty}{\sim} m_V\xi_V\sqrt{r}e^{-m_V r} \tag{9.26}$$

- Абрикосовские вихри *наблюдаемы* в сверхпроводнике, который описывается теорией Гинзбурга-Ландау. При $m_H < m_V$ - это называется сверхпроводником I рода, при $m_H > m_V$ - сверхпроводник II рода. В случае I рода вихри притягиваются, и образуют связанные состояния, в случае II рода - (наблюдаемую на эксперименте) “решетку”. В БПС случае они не взаимодействуют.

- БПС условие: при специальных значений констант “извлекается корень” из операторов второго порядка - уравнения сводятся к уравнениям первого порядка. Часто это является признаком возможности суперсимметричного расширения теории фермионами.

- В четырехмерной полной теории аналогом отображения $\mathbb{S}^1_\theta \to U(1)$ могло бы быть отображение *трехмерной* сферы $\mathbb{S}^3$ в калибровочную группу, с нетривиальным топологическим зарядом, например
$$\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z} \tag{9.27}$$
Соответствующие решения (“вспомогательных” уравнений первого порядка) в неабелевой калибровочной теории поля называются инстантонами.