Дифференциальная геометрия

1 Ковариантное дифференцирование на поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$

1. Действующие лица.

Поверхность S в мы будем представлять как можесто нулей гладкой функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \ \mid f(x_1, x_2, x_3) = 0\right\}.$$

Наша поверхность будет предполагаться регулярной, т. е. градиент $grad\ f\ \neq 0$ в каждой ее точке. Такая поверхность допускает гладкое ориентирующее поле единичных нормальных векторов $N = \frac{grad\ f}{\|gradf\|}$. Вектор N в каждой точке $x \in S$ перпендикулярен касательному пространству T_x к поверхности в точке x (почему?). Касательные векторы к поверхности можно воспринимать как векторы объемлющего пространства . Поэтому можно говорить о длине вектора и углах между векторами в каждом касательном пространстве T_x.

- Под параметризованной кривой в $\mathbb{E}^3$ мы будем понимать гладкое отображение $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$, где I некоторый открытый интервал в $\mathbb{R}$.

2. Ковариантная производная

Предположим, что на кривой γ на поверхности S задано векторное поле $V(t) \in T_{\gamma(t)}$.

Зададимся несколько странным вопросом: с какой скоростью с точки зрения жителя поверхности S меняется поле $V(t)$?

Покоординатное дифференцирование $\dot{V(t)} = (\dot{V_1(t)}, \dot{V_2(t)}, \dot{V_3(t)})$ по t векторного поля V не может служить ответом, так как такой вектор, вообще говоря, не касается поверхности. А векторы в , отличные от касательных к поверхности, не имеют смысла для ученых жителей поверхности. Однако, мы можем при каждом $t \in I$ ортогонально спроектировать вектор $\dot{V(t)}$ на касательное пространство $T_{\gamma(t)}$. Этот процесс дифференцирования с последующим проектированием на касательное пространство называется ковариантным дифференцированием, обозначается значком ∇ и приводит к полю

$(\nabla V)(t)$, снова касательному к поверхности вдоль кривой γ. Итак, ковариантная производная векторного поля V вдоль кривой γ есть векторное поле ∇V, касательное к S вдоль γ и определенное равенством

$$\nabla V = \dot{V} - (\dot{V}, N)N$$

(выражение, стоящее в левой части и есть ортогональная проекция).

Пример 1 *Если $V = \dot{\gamma(t)}$ – поле скоростей точки вдоль кривой γ на S, то ∇V – ее ускорение вдоль кривой γ, каким оно видится на S.*

Свойства ковариантной производной

1) Линейность: для любых двух вещественных чисел и полей V и W вдоль γ:

$$\nabla(aV + bW) = a\nabla V + b\nabla W$$

2) Дифференцирование произведения (правило Лейбница):

для любой вещественнозначной гладкой функции f и поля V

$$\nabla(fV) = f\nabla V + \frac{df}{dt}V$$

3) Правило дифференцирования скалярного произведения

$$\frac{d}{dt}(V, W) = (\nabla V, W) + (V, \nabla W)$$

3. Параллельный перенос вдоль кривой как синоним ковариантного дифференцирования

Вообще говоря, нет способа определить понятие «одно и то же направление» в разных точках поверхности. Однако ковариантное дифференцирование позволяет по выбранному пути между точками $m_1 = \gamma(a)$ и $m_2 = \gamma(b)$ определить естественную изометрию касательных пространств $T_{\gamma(a)}$ и $T_{\gamma(b)}$ (эта изометрия, как правило, зависит от пути!).

Вот как это делается. Говорят, что векторное поле V вдоль кривой $\gamma \in S$ параллельно вдоль этой кривой, если $\nabla V = 0$ для любого $t \in I$. Условие обнуления ковариантной производной принимает вид

$$\dot{V} - (\dot{V}, N)N = 0 \tag{1}$$

Далее заметим, что $(V, N) = 0$ вдоль кривой γ, а потому

$$0 = \frac{d}{dt}(V, N) = (\dot{V}, N) + (V, \dot{N})$$

или

$$(\dot{V}, N) = -(V, \dot{N}).$$

Теперь условие (1) принимает вид линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{V} + (V, \dot{N})N = 0$$

или в развернутом виде

$$\frac{dV_i}{dt} + \left(\sum_{j=1}^{3} \dot{N}_j V_j\right) N_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

(N_i – координаты нормали N)

По теореме существования и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка найдется единственное векторное поле V вдоль γ, удовлетворяющее уравнению (2) и начальному условию $V(t_0) = V_0$.

Контрольный вопрос: почему построенное поле касается S?

Если не обращать внимания на некоторые трудности с областью определения решения (определено ли решение для всех $t \in I$?), прикрывшись линейностью системы, то мы доказали следующую теорему.

Теорема 1 *Пусть на поверхности S лежит параметризованная кривая $\gamma : I \to S$, $t_0 \in I$ и $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}$. Тогда существует единственное параллельное векторное поле $V(t)$, касательное к S вдоль γ, для которого $V(t_0) = V_0$.*

Вернемся к нашему пути $\gamma(t)$ между двумя точками m_1 и m_2 на поверхности. Для каждого $V \in T_{\gamma(a)}$ единственным образом определено параллельное поле V вдоль γ. Возникает отображение $P_\gamma : T_{\gamma(a)} \to T_{\gamma(b)}$, $P_\gamma(V) = V(b)$. Оно и называется параллельным переносом вдоль γ.

Перечислим его свойства:

1) P_γ – линейное преобразование
2) P_γ сохраняет скалярное произведение векторов, а значит их длины и углы между ними.

Кривизна, о которой речь пойдет дальше, отражает зависимость P_γ от пути γ.

Наоборот, если на поверхности задан параллельный перенос, то ковариантную производную можно вычислить по известной формуле математического анализа:

$$\nabla V = \frac{d}{dt}\left(P^{-1}_{(t_0,t)}(V(\gamma(t))\right)|_{t=t_0},$$

где $P_{(t_0,t)} : T_{\gamma(t_0)} \to T_{\gamma(t)}$ – параллельный перенос.

4. Ковариантная производная векторного поля вдоль другого векторного поля.

Дело в том, что в любой точке поверхности корректно определена операция $\nabla_T W$ ковариантного дифференцирования векторного поля W на поверхности S по направлению вектора T: пусть m – точка на поверхности, в которой приложен вектор $T \in T_m$.

Выпустим из m любую кривую $\gamma(t)$ по направлению T (это означает, что $\gamma(0) = m, \dot{\gamma}(0) = T$) и положим по определению $\nabla_T W = \nabla W(\gamma(t)) \mid_{t=0}$.

Таким образом, речь идет о ковариантной производной сужения поля W на кривую γ. От выбора кривой γ ничего не зависит. В самом деле,

$$\nabla_T W = \frac{d}{dT} W - (\frac{d}{dT} W, N) N,$$

где $\frac{d}{dT} W$ – обычная производная вектор-функции $W(t)$ в по направлению T.

Тем самым для двух векторных полей W и V на поверхности определено новое векторное поле $\nabla_V W$, которое называется ковариантной производной векторного поля W вдоль поля V.

К перечисленным в п.2 свойствам ковариантного дифференцирования добавляются еще два.

4) Линейность по направлению

$$\nabla_{aT+bR} W = a\nabla_T W + b\nabla_R W$$

5) Симметричность

$$\nabla_V W = \nabla_W V$$

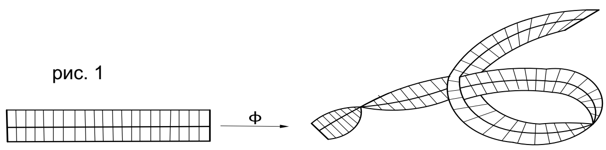
для любых коммутирующих векторных полей V и W на S (напомним, что векторные поля называются коммутирующими, если они коммутируют как операторы дифференцирования, т. е. $V(Wf) = W(Vf)$ для любой гладкой функции на S).

2 Формула первой вариации длины пути и геодезические

1. Первая вариация.

- Пусть $\gamma(t) : I \to S$ – параметризованная кривая на поверхности S. Вариацией кривой $\gamma(t)$ назовем такое гладкое отображение $\varphi(t,s) : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ прямоугольника $[a,b] \times (-\epsilon,\epsilon)$ в S ($[a,b] \subset I$), что $\varphi(t,0) = \gamma(t)$ для всех $t \in [a,b]$. (смотри рис.1)

рис. 1



С вариацией связаны два семейства кривых $\gamma_s(t) = \varphi(t,s)$ (s фиксировано) и $\alpha_t(s) = \varphi(t,s)$ (t фиксировано) и два поля скоростей вдоль каждой из них: поле $T(t,s) = \frac{\partial\varphi(t,s)}{\partial t}$ и поле $V(t,s) = \frac{\partial\varphi(t,s)}{\partial s}$, которое мы будем называть полем вариации. Пусть $L(s) = \int_a^b \|T(t,s)\|\,dt$ – длина пути $\gamma_s(t)$ от $t=a$ до $t=b$. Вычислим $\left.\frac{dL(s)}{ds}\right|_{s=0}$, то есть, говоря неформально, найдем скорость изменения длины кривой $\gamma(t)$ при ее «малом шевелении» на поверхности. Для простоты будем считать, что кривая $\gamma(t) = \gamma_0(t)$ параметризована длиной дуги (так называемая натуральная параметризация). Это означает, что $\|T(t,0)(t)\| = 1$ для всех t.

Начнем с простого случая, когда рассматриваемая нами поверхность S есть евклидова плоскость . Тогда последовательно получаем:

$$\left.\frac{d}{ds}L(s)\right|_{s=0} = \frac{d}{ds}\int_a^b (T_s(t),T_s(t))^{1/2}\,dt = \left|\begin{array}{c} T_s(t)=\frac{\partial}{\partial t} \\ \text{перестаем писать аргументы}\end{array}\right| =$$

$$= \left.\frac{d}{ds}\int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{1/2} dt\right|_{s=0} = \left.\int_a^b \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{1/2} dt\right|_{s=0} = \left.\int_a^b \frac{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}}dt\right|_{s=0} =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{так как}\\ \|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,0)\|=1\end{array}\right| = \int_a^b \left.\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right|_{s=0} dt = \left|\begin{array}{c}\text{так как координатные поля}\\ \frac{\partial}{\partial s} \text{ и } \frac{\partial}{\partial t} \text{ коммутируют}\end{array}\right| =$$

$$= \int_a^b \left.\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right|_{s=0} dt \qquad (*)$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(V,T)=\left(\frac{\partial}{\partial t}V,T\right)+\left(V,\frac{\partial}{\partial t}T\right)=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу $(*)$, получаем окончательно

$$\int_a^b\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Big|_{s=0}dt=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Big|_a^b-\int_a^b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{s=0}dt.$$

Итак, мы доказали, что

$$L'(s)\big|_{s=0}=(V(t,0),T(t,0))|_a^b-\int_a^b\left(V(t,0),\frac{\partial}{\partial t}T(t,0)\right)dt \tag{3}$$

Формула (3) называется формулой первой вариации длины пути. Она справедлива для любой вариации любой параметризованной кривой $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbb{E}^2$, по которой мы путешествуем с единичной скоростью. Заметим, что интеграл в правой части зависит только от поля ускорения $\ddot\gamma(t)=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\gamma}{\partial t})$ вдоль кривой и поля вариации $V=V(t,0)$ вдоль кривой. Если рассматривать вариацию с закрепленными концами $V(a,0)=V(b,0)=0$, то формула (3) упрощается и принимает вид

$$L'(s)\big|_{s=0}=-\int_a^b(V,\ddot\gamma)dt$$

Что нужно изменить в наших вычислениях, если мы хотим теперь посчитать первую вариацию длины кривой на «искривленной» поверхности S в $\mathbb{E}^3$? Ответ прост: нужно обычное покоординатное дифференцирование заменить ковариантным дифференцированием на поверхности. Вывод формулы (3) будет теперь выглядеть так

$$\frac{d}{ds}L(s)\Big|_{s=0}=\frac{d}{ds}\int_a^b(T,T)^{1/2}dt\Big|_{s=0}=\int_a^b(\nabla_V T,T)dt\Big|_{s=0}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{так как поля}\\ V=\frac{\partial}{\partial s}\text{ и }T=\frac{\partial}{\partial t}\text{ коммутируют}\end{array}\right|=\int_a^b(\nabla_T V,T)dt\Big|_{s=0}$$

Но $\frac{d}{dt}(V,T)=(\nabla_T V,T)+(V,\nabla_T T)$. Интегрируя по частям, получаем

$$L'(s)\big|_{s=0}=(V,T)|_a^b-\int_a^b(V,\nabla_T T)\,dt,$$

где V – поле вариаций, а T – поле скоростей вдоль варьируемой кривой $\gamma(t)$.

Для вариации с неподвижными концами получаем

$$L'(s)\big|_{s=0}=-\int_a^b(V,\nabla_T T)=-\int_a^b(V,\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t))dt.$$

(напомним, что $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma((t)$ называется (ковариантным) ускорением вдоль натурально параметризованной кривой на поверхности.

2. Геодезические

Вариация называется нормальной, если поле вариаций V ортогонально полю скоростей T вдоль кривой, т. е. $(V, T) = 0$ вдоль кривой.

Теорема 2 *Пусть $\gamma(t)$ – кривая на поверхности с единичной скоростью. Следующие три условия эквивалентны:*

1. $L'(s)|_{s=0} = 0$ *для любой ее гладкой вариации с фиксированной начальной скоростью (или, говоря по другому, кривая $\gamma(t)$ является стационарной точкой функционала длины).*
2. $L'(s)|_{s=0} = 0$ *для любой нормальной вариации кривой $\gamma(t)$.*
3. $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$.

Набросок доказательства. Ясно, что из 3) $\Rightarrow$ 1) и из 3) $\Rightarrow$ 2). Для того, чтобы доказать, что из 1) следует 3) достаточно уметь строить гладкую вариацию с заданным полем вдоль кривой $\gamma(t)$. В самом деле, предположим, что в какой-то точке t_0 пути $\gamma(t)$ ковариантная производная $\nabla_T T \neq 0$. Тогда она отлична от нуля в некотором интервале U, содержащем точку t_0. Рассмотрим векторное поле $V = f \cdot \nabla_T T$, где f – гладкая неотрицательная функция, носитель которой непуст и лежит в U. Тогда варьируя кривую $\gamma(t)$ с начальной скоростью V, получим по формуле для первой вариации с закрепленными концами, что $L'(s)|_{s=0} = -\int_a^b f\,\|\nabla_T T\|^2\,dt = -\int_U f\,\|\nabla_T T\|^2\,dt < 0$. Противоречие.

Отметим, однако, что $\big(\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = 0$, и, как показывает формула для первой вариации, существенна только составляющая поля вариации V, ортогональная скорости $\dot\gamma(t)$. Следовательно, из 2) $\Rightarrow$ 3). Утверждение же о существовании нормальной вариации с заданным полем вариации V вдоль кривой будет нами вскоре доказано. ■

Определение 1 *Кривая с единичной скоростью называется геодезической, если она удовлетворяет любому из перечисленных ниже требований:*

а) является стационарной точкой функции длины по отношению ко всем гладким вариациям с закрепленными концами

б) является стационарной точкой по отношению к нормальным вариациям

в) $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$.

Задача 1 *Доказать, что если натурально параметризованная кривая является кратчайшей в малом, то она есть геодезическая.*

Отложим до лучших времен утверждение о том, что геодезическая является кривой, кратчайшей в малом.

Замечание 1 *Если вернуться к связности Леви-Чивита из лекции 1, то условие* $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$ *равносильно тому, что вектор ускорения* $\ddot\gamma(t)$ *ортогонален поверхности для любого* t. *Таким образом, согласно Ньютону, равенство нулю ковариантного ускорения, то есть отсутствие сил, действующих на тело вдоль поверхности, означает, что тело движется с ковариантно постоянной скоростью вдоль геодезической на поверхности (или стоит на месте, но этот случай не предусмотрен нашим определением геодезической).*

Быть или не быть отрезку геодезической кратчайшим путем между его концами решается, как в анализе, с помощью второй производной. А она (эта производная) зависит от Чудовища по имени Кривизна.

3 Элементарное введение в теорию кривизны для гиперповерхностей в $\mathbb{E}^n$.

1. Оператор формы.

Всюду в дальнейшем можно считать, что $n = 2$. Рассмотрим в $\mathbb{E}^{n+1}$ гиперповерхность S, ориентированную полем единичных нормалей N, $\|N\| = 1$. Заметим, что в любой точке $m \in S$ и для любого вектора $v \in T_m$ производная $\frac{\partial}{\partial v}$ поля N по направлению вектора v лежит в касательном пространстве T_m (почему?). Таким образом возникает линейный оператор $L_m : T_m \to T_m$, определенный по формуле

$$L_m(v) = \partial_V N \quad \text{(покоординатное дифференцирование по направлению } v\text{)}$$

Так как касательное пространство T_m поворачивается в $\mathbb{E}^{n+1}$ одновременно с поворотом нормали N_m, то вектор $L_m(v)$ можно понимать как скорость поворота касательного пространства в точке m при проезде через эту точку по любой кривой со скоростью v. Оператор L_m называется оператором формы.

Пример 2 *Найдем явный вид оператора формы для n-мерной сферы*

$$S_r : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = r^2,$$

ориентированной единичным полем нормалей $N = \left(\frac{x_1}{r}, \ \dots \ , \frac{x_{n+1}}{r}\right)$.

По определению,

$$L_{(x_1 \ \dots \ x_{n+1})}(v) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{r} \right), \ \dots \ , \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \left(\frac{x_{n+1}}{r} \right) \right), v \right\rangle, \tag{4}$$

где $\langle \ , \ \rangle$ – скалярное произведение в касательном пространстве $T_{(x_1 \ \dots \ x_{n+1})}$.

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) = 1/r + x_i \left(-\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} r}{r^2} \right)$. Кроме того, в силу симметрии $\frac{\partial}{\partial x_i} r = \frac{\partial}{\partial x_j} r$ для любых $i, \ j$. Поэтому скалярное произведение в правой части формулы (4) равно $\frac{v}{r}$ (почему?). Итак, для сферы $L(v) = \frac{v}{r}$, т. е. оператор формы скалярен: его применение заключается в умножении вектора на $1/r$.

В общем случае он самосопряжен, т. е.

$$\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle \ \text{ для любых векторов } v, w \in T_m.$$

Замечание 2 *Таким образом, можно в каждом касательном пространстве* T_m *гиперповерхности* S *рассмотреть билинейную симметрическую форму* $B(u, v) = \langle L(u), w \rangle$. *Ассоциированная с ней квадратичная форма* $B(u, u)$ *называется второй фундаментальной формой гиперповерхности. Подразумевается, что первая квадратичная форма – это метрика, индуцированная на* T_m *евклидовой метрикой в* $\mathbb{E}^{n+1}$.

Теорема 3 *Оператор формы самосопряжен*

$\square$ Е сли $S = \left\{x \in \mathbb{E}^{n+1}, x = (x_1, \; \dots \;, x_{n+1}), f(x) = 0\right\}, N = \frac{gradf}{\|gradf\|}$, то простое вычисление показывает, что

$$\langle L(u), w\rangle = 1/\left\|gradf\right\| \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i w_j \tag{5}$$

Остается заметить, что правая часть симметрична относительно векторов u и w, поскольку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\blacksquare$

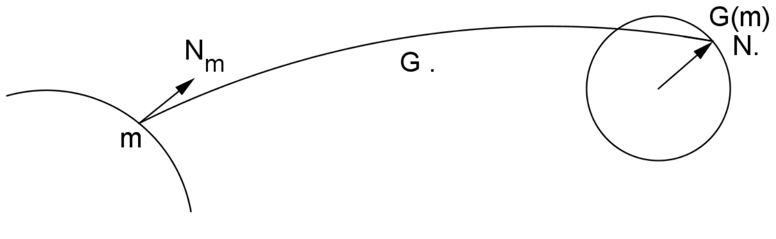
Пусть $(e_1, \; \dots \;, e_n)$ ортонормированный базис касательного пространстваа T_m, состоящий из собственных векторов самосопряженного оператора L_m с собственными значениями $k_1, \; \dots \;, k_m$. Числа $k_1, \; \dots \;, k_m$ называются главными кривизнами гиперповерхности S в точке m, а произведение главных кривизн $\prod k_i = det \; L_m$ называется кривизной Гаусса гиперповерхности S в точке m. Разумеется, если $\|v\| = 1$. то кривизна в напралении v равна $k(v) = \langle Lv, v\rangle$.

Пример 3 *Главные кривизны сферы* $S^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ *равны* $1/r$, *а ее гауссова кривизна* $K = 1/r^n$.

Заметим, что формула (5) дает прямой способ для вычисления кривизны гиперповерхности по направлению.

2. Отображение Гаусса.

Это отображение ставит в соответствие каждой точке $m \in S$ на поверхности ту точку единичной сферы S^n, в которую упирается вектор N_m ориентирующего поля единичных нормалей.



Оператор L является, по определению, дифференциалом отображения Гаусса G. Отметим, что векторы нормалей на поверхности в точке m и на сфере в точке $G(m)$ совпадают, если их рассматривать как векторы в $\mathbb{E}^{n+1}$. Обозначим через ω_{n+1} форму объема $dx_1 \wedge \; \dots \; \wedge dx_{n+1}$ в $\mathbb{E}^{n+1}$, и пусть ω_S, ω_{S^n} – ее ограничения соответсвенно на поверхность S и сферу S^n. Это означает, что $\omega_S(v_1, ..., v_n) = \omega(v_1, ..., v_n, N_m)$ в любой точке $m \in S$ и для любых $v_i \in T_m, \; i = 1, ..., n$. Аналогично строится n-форма ω_{S^n} на сфере. При отображении G форма ω_{S^n} переносится с помощью операции «pull-back»а на поверхность. Получившуюся так форму старшей степени на S обозначим через $(dG)_*\omega_{S^n}$. Тогда $(dG)_*\omega_{S^n} = det \; L \cdot \omega_S$ в каждой точке поверхности (почему?).

Отсюда довольно легко получается практическая формула для вычисления гауссовой кривизны поверхности.

$$\boxed{\text{Практическая формула}}\quad K = det \begin{pmatrix} \partial_{v_1}(grad\ f) \\ \dots \\ \partial_{v_n}(grad\ f) \\ grad\ f \end{pmatrix} / \, \|grad\ f\|^n \, det \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \\ grad\ f \end{pmatrix},$$

где $(v_1, ..., v_n)$ – произвольный базис в T_m, $m \in S$.

Пример 4 *Вычислим гауссову кривизну гиперболического параболоида* $z = x^2 - y^2$ *в его произвольной точке* (x, y, z).

$grad\ f = (2x, -2y, 1)$. Поэтому в касательном пространстве T_m лежат векторы $w = (w_1, w_2, w_3)$, удовлетворяющие условию

$$2xw_1 - 2yw_2 + w_3 = 0$$

В качестве базисных, всюду, где $x^2 - y^2 \neq 0$, можно рассмотреть векторы $v_1 = (y, x, 0)$ и $v_2 = (x, y, -2z)$.

Тогда $\partial_{v_1} grad\ f = (2y, -2x, 0)$ и $\partial_{v_2} grad\ f = (2x, -2y, 0)$

$$det \begin{vmatrix} \partial_{v_1}(grad\ f) \\ \partial_{v_2}(grad\ f) \\ grad\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & -2x & 0 \\ 2x & -2y & 0 \\ 2x & -2y & 1 \end{vmatrix} = -4y^2 + 4x^2 = 4z$$

$$det \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ grad\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ x & y & -2z \\ 2x & -2y & 1 \end{vmatrix} = y^2 - 4x^2 z + x^2 = -z(1 + 4x^2 + 4y^2)$$

Тогда

$$k = \frac{4z}{-z(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} = -\frac{4}{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

3. Кривизна. Попытка взлететь.

Выберем в области U на поверхности S координаты (x, y). Пусть $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ – координатные векторные поля. И хотя поля X и Y коммутируют (как дифференциальные операторы на пространстве функций), т. е. $X(Y(f)) = Y(X(f))$ для любой гладкой функции f, операторы ∇_X и ∇_Y, вообще говоря, не коммутируют: для векторного поля Z, вообще говоря, $\nabla_X \nabla_Y Z \neq \nabla_Y \nabla_X Z$.

Разность $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z$ называется оператором кривизны, а скалярная функция четырех векторных аргументов $(R(X, Y)Z, W)$ называется тензором кривизны.

Замечание 3 *Если не предполагать поля* X *и* Y *коммутирующими, то оператор кривизны определяется как*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Следующие четыре упражнения объясняют, в частности, почему речь действительно идет о тензоре и обнаруживают некоторые его симметрии. Для простоты мы сохраняем соглашение о том, что $[X, Y] = 0$.

Упражнение 1 *Для любой гладкой функции f*

$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla_Y (fZ) = fR(X, Y)Z$$

Упражнение 2 $R(gX, fY)Z = gfR(X, Y)Z$ *для любых гладких функций f и g.*

Упражнение 3 $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

Упражнение 4 $(R(X, Y)Z, W) = (R(Z, W)X, Y)$

Используя эти упражнения, можно показать, что $R(X, Y)Z = 0$ в данной точке поверхности, если хотя бы одно из полей участников равно 0 в этой точке. Отсюда немедленно следует, что значение $R(X, Y)Z$ в точке $m \in S$ зависит *только от значений* полей X, Y, Z в этой точке.

Выберем два единичных ортогональных вектора X и Y в касательном пространстве T_m в точке $m \in S$. Величина $K(m) = (R(X, Y)X, Y)$ называется *гауссовой кривизной поверхности в точке m.*

Начиная с этого момента, мы рассматриваем поверхность S с заданной на ней римановой метрикой. По римановой метрике однозначно восстанавливается связность Леви-Чивита, а по связности Леви-Чивита строится оператор (тензор) кривизны.

Упражнение 5 *Как изменится гауссова кривизна, если риманову метрику на поверхности умножить на два?*

Разберем пример. Пусть риманова метрика в координатах (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$g = (dx)^2 + \varphi^2(x, y)(dy)^2 \quad (\varphi(x, y) \text{ – гладкая положительная функция})$$

Вид метрики сразу говорит нам о том (почему?), что $\left\|\frac{\partial}{\partial x}\right\|^2 = 1$, а $\left\|\frac{\partial}{\partial y}\right\|^2 = \varphi^2(x, y)$. Кроме того, $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$.

Поэтому, $X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial y}$ – суть два ортогональных единичных вектора в каждой точке поверхности. Гауссова кривизна равна

$$K = \frac{1}{\varphi^2}\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Для начала вычислим $R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}$.

Упражнение 6 *Докажите, используя свойства связности Леви-Чивита, что*

а) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x} = 0$

б) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\varphi_x}{\varphi}\frac{\partial}{\partial y}$

Используя результаты упражнения 6, получаем

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} = -\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x} = -\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\varphi_x}{\varphi}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\varphi_x}{\varphi}^2\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\frac{\partial}{\partial y}$$

Следовательно, $K = -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}$. Можно сказать и так: гауссова кривизна в каждой точке поверхности (гладкая функция на S) связана с метрикой дифференциальным уравнением $\varphi_{xx} + K\varphi = 0$ (это уравнение было открыто Гауссом, но носит имя Якоби, который создал вокруг него большую науку).

Отметим одно интересное следствие: если $\varphi(x,y) = ch\ x$, то наша метрика имеет постоянную гауссову кривизну, равную (-1). Контрольный вопрос: можно ли подобрать $\varphi > 0$ так, чтобы $K \equiv 1$?

4 Отображение exp и геодезические.

Из формулы для первой вариации длины кривой следует, что кратчайшая кривая с единичной скоростью между двумя точками p и q на поверхеости S должна быть геодезической. Но вопрос о существовании кратчайшей остается открытым. Мы покажем, что если точки p и q достаточно близки друг к другу, то существует геодезическая между ними, которая будет кратчайшей среди всех кривых на поверхности, соединяющих p и q. Это будет сделано с помощью экспоненциального отображения exp, конструкция которого представляется одной из важнейших в дифференциальной геометрии.

Определение и простые свойства exp.

Пусть $m \in S$ – точка на S, T_m – касательное пространство, $v \in T_m$. Обозначим через $a(v;t)$ единственную геодезическую на S, выходящую из точки m со скоростью v:

$$a(v,0) = m, \quad \dot{a}(v,0) = v$$

Через I_v обозначим максимальный интервал тех значений t, для которых геодезическая существует. Положим

$$U = \{v \in T_m \,|1 \in I_v\}.$$

Определим отображение $\exp : U \to S$, полагая

$$\exp(v) = a(v;1). \qquad (*)$$

Замечание. Нулевой вектор всегда лежит в U и его образ $\exp(0) = m$.

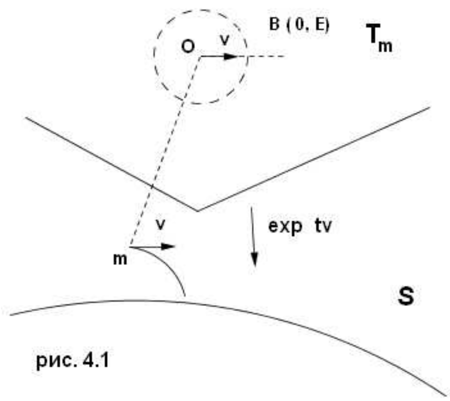


рис. 4.1

Пример 5 *Окружность* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. *В этом случае* $a(v;t) = (\cos vt, \sin vt)$ *и* $\exp v = (\cos v, \sin v)$, *или, в комплексном виде,* $\exp v = e^{iv}$.

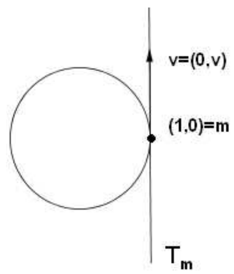


рис. 4.2

Перечислим те свойства exp, которые либо прямо следуют из определения, либо просто из него выводятся:

1. Отображение exp определено в некотором открытом шаре $U = B^0(0;\epsilon)$ касательного пространства T_m.

2. Если $v \in U$, то $tv \in U$, где $0 \leq t \leq 1$.

3. $(d\exp)_m = id$, а потому можно считать (сославшись на теорему о неявной функции), что $\exp : B^0(0;\epsilon) \to S$ диффеоморфно отображает некоторый открытый шар с центром в нуле в касательном пространстве T_m на открытое подмножество в S, содержащее точку m.

4. Для каждой точки $v \in B^0(0;\epsilon) \subset T_m S$ геодезическая $a(t;v) = \exp(tv)$ для всех t, $0 \leq t \leq 1$.

5. Длина $l(v)$ геодезической $\exp(tv)$ $(0 \leq t \leq 1)$ равна $|v|$.

Комментарии.

• Если просто и честно (по-гайдаровски), то exp преобразует движение точки по лучу vt в евклидовом пространстве T_m с постоянной скоростью v в движение на поверхности S по геодезической $\exp(tv)$ с той же начальной скоростью v. Поскольку во все время движения $|\dot{\exp}(tv)| = |v|$, то утверждение 5 кажется понятным (смотри рисунок 4.1).

• • Утверждение 4 следует из единственности геодезических: кривая $a(v,ts)$, определенная на интервале I_v/t, является геодезической со скоростью $\dot{a}(v,ts)_{s=0} = t\dot{a}(v,0) = tv$. В силу единственности $a(tv,s) = a(v,ts)$, т. е. $a(tv,1) = \exp(tv) = a(v,t)$.

Задача 1. Убедить себя в том, что Вы понимаете Утверждения 2 и 3.

• • • Утверждение 1 есть следствие компактности сферы и теоремы о гладкой зависисмости решений от начальных условий. (Указание: рассмотрите отображение: $\frac{v}{\|v\|} \to |I_v| \neq 0$).

Для тех, кому это хорошо знакомо, предлагаю развлечение в виде задачи 2.

Задача 2* Пусть $X = E^2$ – евклидова плоскость или $X = \Lambda^2$ – плоскость Лобачевского. Если $m \in X$, то отображение $\exp : T_m \to X$ является диффеоморфизмом.

Лемма 1

$$\|(d\exp)_v(w)\| = \|w\|\,, \textit{если} \;\; w = tv.$$

Это же можно сказать и так: отображение exp *сохраняет длины касательных векторов в радиальном направлении.*

□ Достаточно доказать, что $\|(d\exp)_v(v)\| = \|v\|$ (почему?).
Но $\left(\dot{\exp}\, tv\right)_{t=1} = (d\exp)_v(v)$. Как уже было отмечено в комментарии к пункту 5, $\left\|\dot{\exp}\, tv\right\| = \|v\|$. ■

Пример 6 *Геодезические на сфере S^2 (радиуса 1), стартующие в южном полюсе m, суть образы при отображении* exp *лучей из O. На рисунке 4.3 хорошо видно, что лишь при достаточно малом ϵ* $(0 \le \epsilon \le 1)$ exp *отображает шар $B^0(0;\epsilon)$ диффеоморфно на зону U_ϵ на сфере.*

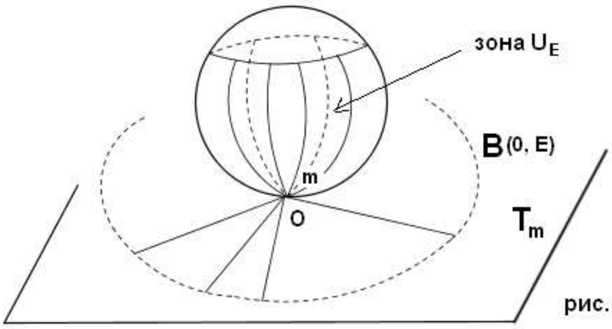


рис. 4.3

Следующая техническая лемма поможет нам окончательно решить вопрос о кратчайшей. Действие происходит в шаре $B^0(0;\epsilon)$ определения отображения exp в точке m.

Лемма Гаусса *Если вектор $w \in T_m$ ортогонален лучу tv, то $(d\exp)_v(w)$ ортогонален к геодезической $exp(tv)$. (см. рис. 4.4)*

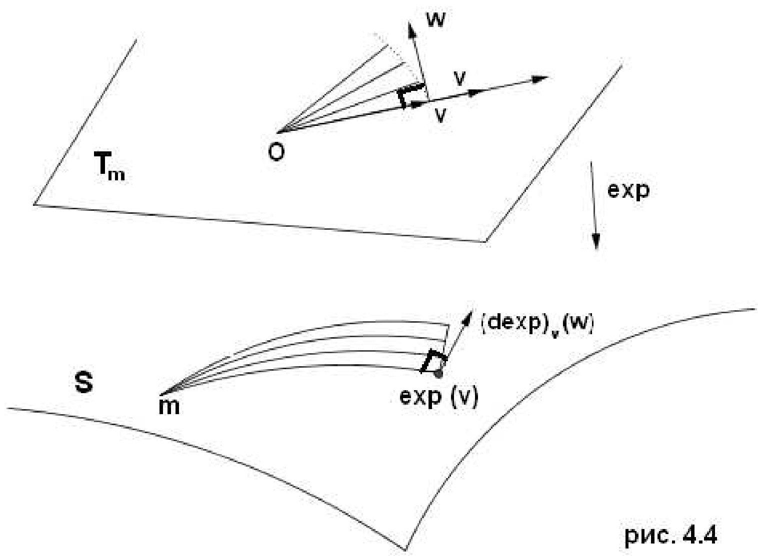


рис. 4.4

□ В касательном пространстве T_m в плоскости, натянутой на векторы v и w, рассмотрим семейство (веер) векторов $v(\theta)$, концы которых лежат на окружности радиуса $|v|$, $v(0) = v$. Тогда на S возникает семейство геодезических $\gamma(\theta, t) = \exp(tv(\theta))$, $0 \le t \le 1$, равной длины $\|v(\theta)\| = \|v\|$, в котором варьируется геодезическая $\gamma(0, t) =$

$\exp(tv)$. Ясно, что $(d\exp)_v v$ – это значение поля скоростей вдоль $\gamma(0,t)$ в точке $t=1$, а $(d\exp)_v w$ – это значение поля вариации (поля поперечных скоростей) в той же точке (почему?).

Применяя формулу для первой вариации и учитывая, что длина кривой $\gamma(\theta,t)$ не меняется, легко получаем, что

$$0 = \langle (d\exp)(w), (d\exp)(v)\rangle \qquad \blacksquare$$

Задача 2 *Восстановить все пропущенные детали в доказательстве леммы Гаусса.*

Действие следующей леммы происходит в шаре $B^0(0;\epsilon)$, где exp – диффеомеорфизм.

Лемма 2 *Пусть $\tilde{\gamma}(t)$ – любая гладкая кривая, соединяющая m и $\exp v$ на S (см. рис. 4.5). Тогда*

$$l(\tilde{\gamma}(t)) \geq \|v\| = l(\exp(tv)).$$

$$(\gamma(t) = \log\tilde{\gamma}(t))$$

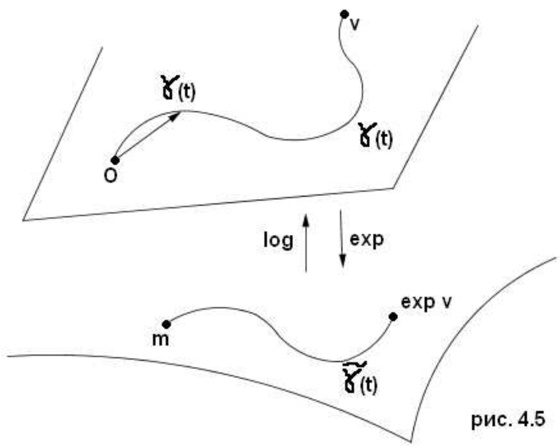


рис. 4.5

□ Пусть $\gamma(t) = \varphi(t)u(t)$, где $\|u(t)\| = 1$. Тогда $\dot{\gamma}(t) = \dot{\varphi}u + \varphi\dot{u}$, и $\dot{u}\perp u$. Далее,

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}\|\,dt = \left|\begin{array}{c}\text{так как а) в радиальном направлении и расстояния сохраняются}\\ \text{б)}\ \ (d\exp)(u)\perp(d\exp)(\dot{u})\end{array}\right| \geq$$

$$\geq \int_0^1 |\dot{\varphi}(t)|\,dt \geq \left|\int_0^1 \dot{\varphi}(t)dt\right| \geq |\varphi(1)| = |v| \qquad \blacksquare$$

Выводы: геодезические $\exp(tv)$ являются кратчайшими в области $\exp(B^0(0;\epsilon)) \subset S$, содержащей точку m.

Приложив дополнительные усилия, можно доказать (смотри СТРОГИЕ ТОЛСТЫЕ КНИГИ), что каждая точка S обладает выпуклой окрестностью U, т. е. такой окрестностью, где любые две точки можно соеденить кратчайшей геодезической (кратчайшая геодезическая обычно называется отрезком).

Замечание. Понятие геодезической требует наличия на многообразии только связности. Поэтому одна лишь связность на многообразии позволяет ввести отображение exp и изучить его свойства. Как только появляется риманова (или псевдориманова) метрика на многообразии, появляется и согласованная с ней связность Леви-Чивита. Здесь речь идет об отображениии exp относительно именно этой связности.

Вопрос: можно ли построить связность Леви-Чивита на симплектическом многообразии?

5 Связности Леви-Чивита левоинвариантных метрик на группе Ли

• Группа Ли – это дифференцируемое многообразие G вместе с групповой операцией $G\times G \to G$, согласованной со структурой многообразия в том смысле, что отображение $(x,y) \to (xy^{-1})$ из $G \times G$ в G является гладким.

Мы будем, как правило, рассматривать матричные группы Ли. Например, группу SO(3) ортогональных матриц третьего порядка с определителем 1. Напомним, что

$$\mathrm{SO}(3) = \left\{ O \in M_3(\mathbb{R}) \ \middle| O \cdot O^T = E \right\}, \quad \text{здесь } \ E \text{ – единичная матрица } 3 \times 3.$$

Другой поучительный пример – группа SL(2, $\mathbb{R}$) (или SL(2, $\mathbb{C}$)), состоящая из вещественных (комплексных) унимодулярных матриц 2×2.

• • Напомним, что касательное пространство в единице к группе Ли наделяется структурой алгебры Ли.

Пример 1. Дифференцируя по t (в точке $t = 0$) кривую $O(t)$, $O(0) = E$, лежащую в группе SO(3), получим в качестве вектора касательного пространства матрицу $\dot{O}(t)\,|_{t=0} = K$, которая удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(O(t) \cdot O^T(t)\right)|_{t=0} = K + K^T = 0.$$

Тем самым касательное пространство T_e состоит из кососимметрических матриц K, $K = -K^T$.

В трехмерном линейном пространстве кососимметрических 3×3 матриц скобка Ли вводится по правилу:

$$[K_1, K_2] = K_1K_2 - K_2K_1$$

Задача 1. Проверьте, что $[K_1, K_2]$ – кососимметрическая матрица.

Задача 2. Определим $\exp X$, где X – матрица, с помощью сходящегося ряда

$$\exp X = E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ \dots \ + \frac{X^n}{n!} + \ \dots$$

Докажите, что $\exp K \in \mathrm{SO}(3)$, если K – кососимметрическая 3×3 - матрица.

Контрольный вопрос. Является ли отображение $\exp : T_e \to$SO(3), $K \to \exp(K)$, сюръективным?

••• На группе Ли G есть два замечательных семейства диффеоморфизмов: левые сдвиги $L_x : G \to G$, $L_x(y) = xy$ и правые сдвиги $R_x : G \to G$, $R_x(y) = yx$.

Заметим, что любой левый сдвиг коммутирует с любым правым.

●●●● Риманова метрика на группе G называется левоинвариантной, если

$$\langle u, v\rangle_y = \langle (dL_x)u, (dL_x)v\rangle_{L_x y} \qquad (*)$$

(здесь $\langle u, v\rangle_y$ – скалярное произведение в касательном пространстве $T_y = (dL_y)(T_e)$ в точке $y \in G$).

Ясно, что такое правоинвариантная метрика и что такое биинвариантная метрика.

Пример 2. В касательном пространстве T_e группы SO(3) введем скалярное произведение по правилу

$$\langle K_1, K_2\rangle = tr(K_1 K_2^T) = -tr(K_1 K_2).$$

Ясно, что $\langle K_1, K_2\rangle = \langle K_2, K_1\rangle$ (почему?) и что $\langle K_1, K_2\rangle \geq 0$, причем $\|K_1\| = 0 \Leftrightarrow K_1 = 0$

(указание: если $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}$, то $-trK^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$).

Любую метрику на пространстве T_e можно однозначно продолжить до левоинвариантной метрики на группе, полагая

$$\langle u, v\rangle_y = \left\langle (dL_y^{-1})u, (dL_y^{-1})v\right\rangle_e$$

Задача 3. Показать, что так построенная левоинвариантная метрика в примере 2 является одновременно и правоинвариантной.

●●●●● Структуру алгебры Ли в касательном пространстве $T_e G$ к группе Ли G в единице можно ввести другим путем, который нам ближе по духу. А именно, назовем векторное поле X на группе G левоинвариантным, если $dL_g(X) = X$ для всех $g \in G$. Нетрудно понять, что такое поле однозначно определяется своим значением в $T_e G$.

И обратно, любой вектор $X_e \in T_e G$ однозначно определяет левоинвариантное векторное поле (которое из антипедагогических соображений будет обозначаться той же буквой X) $X(g) = (dL)_g X_e$.

Как и на любом многообразии, можно рассмотреть коммутатор $[XY]$ (скобку Ли) двух левоинвариантых векторных полей X и Y. Оказывается, что $[XY]$ – левоинвариантное векторное поле. Если это так, то на $T_e G$ можно определить скобку Ли по формуле $[X_e, Y_e] = [X, Y]_e$.

Отступление. Докажем левоинвариантность поля $[XY]$. Заметим, что оператор левого сдвига $L_x : G \to G$ естественно действует как линейный оператор на пространстве гладких функций $f \in C^\infty(G)$ на группе G по формуле

$$(L_x^* f)(y) = f(xy)$$

Левоинвариантность поля X, рассматриваемого как дифференциальный оператор, в точности означает, что операторы X и L^* коммутируют (как два оператора на пространстве $C^\infty(G)$), т. е.

$$X(L_y^* f) = L_y^*(Xf) \quad \text{для любого } y \in G.$$

Но тогда имеем,

$$[XY](L_y^* f) = X(Y(L_y^* f)) - Y(X(L_y^* f)) = X(L_y^*(Yf) - Y(L_y^*(Xf)) =$$

$$= L_y^*(X(Yf)) - L_y^*(Y(Xf)) = L_y^*([XY]f), \quad \text{ч. т. д.}$$

Переходим к главной теме этой лекции. Наша цель – научиться явно вычислять ковариантную производную Леви-Чивита левоинвариантной метрики на группе Ли G. Это дает нам возможность вычислять гауссовы кривизны на группах Ли. Вычисления предварим несколькими замечаниями.

Замечание 1. Векторные поля на группе G образуют модуль над кольцом $C^\infty(G)$ гладких функций. Базисом этого модуля служат левоинвариантные векторные поля.

Задача 4. Доказать, что $rk_{C^\infty(G)}(Vect(G)) = dim_{\mathbb{R}}(T_e(G))$.

Отсюда следует, между прочим, что достаточно научиться вычислять $\nabla_X Y$, где X и Y – левоинвариантные векторные поля.

Замечание 2. Если ∇ – связность Леви-Чивита левоинвариантной метрики на группе Ли G, то $\nabla_X Y$ – левоинвариантное векторное поле, если таковы поля X и Y (почему?).

Замечание 3. Если X и Y – левоинвариантные векторные поля, то $\langle X, Y\rangle = const$.

Замечание 4. Связность Леви-Чивита обладает следующими свойствами:

а) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [XY]$ (по определению)

б) если Y и Z – левоинвариантные векторные поля, то $(\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z) = 0$ (указание: воспользоваться основным свойством $\partial_X(Y,Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$ и замечанием 3).

Рассмотрим тензор $T(X,Y,Z)$, который на тройке левоинвариантных векторных полей принимает значение $(\nabla_X Y, Z)$. Тензор T кососимметричен по последним аргументам (Замечание 4 б))

$$T(X,Y,Z) = -T(X,Z,Y) \qquad (1).$$

Что касается перых двух аргументов, то здесь немного хитрее:

$$T(X,Y,Z) - T(Y,X,Z) = ([XY], Z) \qquad (2).$$

Я утверждаю, что такой тензор единственным образом восстанавливается по алгебре Ли T_eG и метрике. В самом деле,

$$T(X,Y,Z) = -T(X,Z,T) = -T(Z,X,Y) - ([XZ],Y) = -(-T(Y,Z,X) - ([ZY],X)) - ([XZ],Y) =$$

$$= -(-(-(T(X,Y,Z) - ([YX]Z)) - ([ZY],X))) - ([XZ],T) =$$

$$= -T(X,Y,Z) - ([YX],Z) + ([ZY],X) - ([XZ],Y) \quad \text{(объясните!)}$$

Следовательно,

$$T(X,Y,Z) = \frac{1}{2}([XY],Z)+\frac{1}{2}([ZY],X)-\frac{1}{2}([XZ],Y) = \frac{1}{2}([XY],Z)-\frac{1}{2}([YZ],X)-\frac{1}{2}([XZ],Y) \quad (3).$$

Если через $A(X,Y)$ обозначить такую билинейную форму на алгебре Ли T_eG со значениями в T_eG, что

$$([YZ],X) = (A(X,Y),Z),$$

то из (3) получается, что

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([XY] - A(X,Y) - A(Y,X))$$

для левоинвариантных векторных полей X и Y.

Задача 5*. Если рассматриваемая левоинвариантная метрика биинвариантна, то $\nabla_X Y = \frac{1}{2}\,[XY]$.

Задача 6. Вычислить гауссову кривизну $G(X,Y) = (R(X,Y)X,Y)$ на SO(3) для биинвариантной метрики из примера 2.

Задача 7*. Используя результат задачи 5, показать, что на группе Ли G с биинвариантной метрикой однопараметрические подгруппы $\exp tX$, $X \in T_eG$, и только они, являются геодезическими.

6 Уравнение Якоби

Работаем на полных связных римановых многообразиях. Мотор.

• На прошлой лекции мы доказали, следуя Хопфу-Ринову, что на геодезически полном связном многообразии (M, g) любые две точки можно соединить кратчайшей, которая непременно является отрезком геодезической. Но если геодезическая слишком длинна, то она, вообще говоря, уже не реализует расстояние между своими точками. Хорошо известный пример – замкнутые геодезические на сфере.

• • Существует глубокая связь между существованием неминимальных геодезических через точку $m \in M$ и особенностями отображения $\exp_m : T_m M \to M$, которое на геодезически полном римановом многообразии M (а значит и на полном метрическом пространтсве (M, g)) определено всюду.

• • • Немного прояснить суть здесь происходящего помогут поля Якоби.

Поля Якоби.

Определение 2 *Полем Якоби называется поле геодезической вариации геодезической $\gamma(t)$.*

Это означает, что геодезическая $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, варьируется в таком семействе кривых $\gamma(s,t)$, $0 \le t \le 1$, $-\epsilon \le s \le \epsilon$, $\gamma(0,t) = \gamma(t)$, где каждая кривая $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ является геодезической. Как обычно, поле вариации $V(t) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)\,|_{s=0}$. По традиции для поля Якоби используют обозначение $J(t)$ ($T = T_s(t)$ по-прежнему обозначает поле скоростей вдоль геодезической)

Лемма 3 *а) Поле Якоби удовлетворяет дифференциальному уравнению Якоби*

$$\nabla_T^2 J + R(T,J)T = 0 \qquad (1)$$

б) Уравнение Якоби – это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Пространство его решений 2 dim M -мерно. Каждое решение определяется начальными значениями: парой векторов $J(0), (\nabla_T J)(0)$.

в) верно и обратное утверждение: любое поле Якоби $J(t)$ на геодезической $\gamma(t)$ является полем скоростей некоторой ее геодезической вариации.

Доказательство. а) Имеем

$$\nabla_T^2(J) = \nabla_T(\nabla_T J) = \nabla_T(\nabla_J T) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Так как} [T,J] = 0, \text{то} \\ R(T,J)T = \nabla_J \nabla_T T - \nabla_T \nabla_J T = \\ = -\nabla_T \nabla_J T, \ \text{поскольку } \nabla_T T = 0 \end{array} \right| = -R(T,J)T$$

$$\text{или} \quad \nabla_T^2(J) + R(T,J)T = 0.$$

б) Чтобы дотронуться до этого уравнения, воспользуемся методом подвижного репера – полезной идеей Эли Картана.

Введем вдоль геодезической $\gamma(t)$ ортонормированные параллельные базисы $e_i(t)$ (это значит, что 1) $\{e_i(t)\}$ – ортонормированный базис в $T_{\gamma(t)}M$ при любом $0 \le t \le 1$; 2) векторное поле $e_i(t)$ параллельно вдоль кривой $\gamma(t)$ $(\nabla_T e_i = 0)$ для всех $i = 1, \dots, n$). Тогда $J = \sum (J, e_i)e_i$, и векторное уравнение (1) записывается в виде линейной системы скалярных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(J, e_i)'' + \sum_{m=1}^{n} (R(T, e_m)T, e_k)(J, e_m) = 0, \qquad k = 1, \dots, n$$

(проверьте!)

Таким образом, утверждение б) основывается на теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы обыкновенных Д.У.

Пример 1. Предположим, что M – полное связное риманово многообразие постоянной секционной кривизны $\sec = K$.

В этом случае,

$$(R(T, e_m)T, e_k) = K \begin{vmatrix} (T,T) & (T, e_k) \\ (e_m, T) & (e_m, e_k) \end{vmatrix} = K \{(T,T)(e_m, e_k) - (T, e_k)(T, e_m)\} \quad \text{(почему ?)}$$

(Указание: полезно понимать тензор кривизны как оператор $R : \Lambda^2 TM \to \Lambda^2 TM$)

Или

$$(J, e_k) + K \sum_{m=1}^{n} \{(T,T)(e_m, e_k) - (T, e_k)(T, e_m)\} (J, e_m) = 0$$

Предположим, что $((J,T) = 0$ (поле Якоби перпендикулярно полю скоростей) и $(T,T) = 1$ (натурально параметризованная геодезическая). Тогда наша система распадается, принимая простой вид:

$$(J, e_k) + K(J, e_k) = 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

Из явного вида решений следует в этом случае, что

Обращаться в нуль в двух точках решение может только при $K > 0$, и нули следуют с шагом $\pi/\sqrt{K}$.

в) Предположим, что на геодезической $\gamma(t)$ от $\gamma(0)$ до $\gamma(1)$ задано якобиево векторное поле $J(t)$. Построим геодезическую вариацию, порождающую поле J.

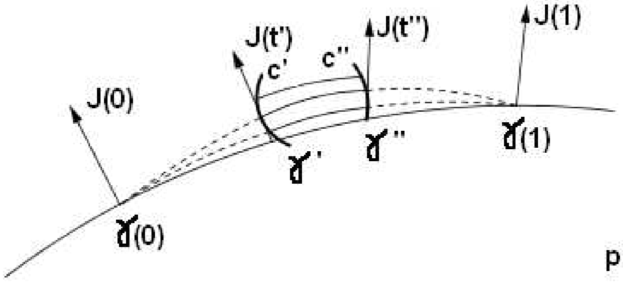


рис. 1

С этой целью рассмотрим пару точек γ' и γ'' на геодезической $\gamma(t)$, которые расположены внутри достаточно малого шара B^0, любые две точки которого можно соединить единственной геодезической (доказательство существования такого шара намечено в задачах 5 листка). Далее, строим две кривые $c'(s)$ и $c''(s)$, стартующие в точках γ' и γ'' с начальными скоростями $J(t')$ и $J(t'')$ соответственно. Нужное семейство геодезических мы получим, соединив геодезическими точки $c'(s)$ и $c''(s)$ (жирные линии на рис. 1) (напомним, что такая геодезическая единственна!), а затем продолжив (смотри пунктиры на рис. 1) построенные геодезические за пределы шала B^0 (в этом месте используется геодезическая полнота M). Остается заметить, что якобиево поле, будучи решением линейного дифференциального уравнения второго порядка, однозначно определяется не только значениями $J(t)$ и $(\nabla_T J)(t)$, но и своими значениями в достаточно близких точках γ' и γ'' (смотри, например, В.И. Арнольд «Обыкновенные дифференциальные уравнения»).

Замечание. Попутно показано, что существуют якобиевы поля вдоль геодезической с любыми наперед заданными значениями в двух близких точках геодезической.

Сопряженные точки и особенности отображения exp.

Определение 3 *Две точки m' и m'' ($m' \neq m''$) называются **сопряженными** вдоль геодезической γ, если на этой геодезической существует ненулевое векторное поле Якоби J, равное нулю в точках m' и m''.*

Кратностью *сопряженных точек точек m' и m'', $m', m'' \in \gamma$, называется размерность линейного пространства всех таких полей Якоби.*

Пример 2. Вычисления, проделанные в примере 1, показывают, что в пространстве постоянной отрицательной кривизны сопряженные точки отсутствуют. Верно более сильное утверждение: сопряженные точки отсутствуют и на многообразиях с секционной кривизной $\sec \leq 0$ (не обязательно постоянной!).

Рассмотрим отображение $\exp_m : T_m M \to M$ в какой-нибудь точке $m \in M$. Геодезическая полнота означает, что это отображение определено на всем касательном пространстве $T_m M$. Предположим, что $\exp_m$ вырождается в точке $v \in T_m M$. Тогда верно следующее:

Лемма 4 *Точки $m = \exp(0)$ и $\exp v$ сопряжены вдоль геодезической $\exp tv$.*

Доказательство.

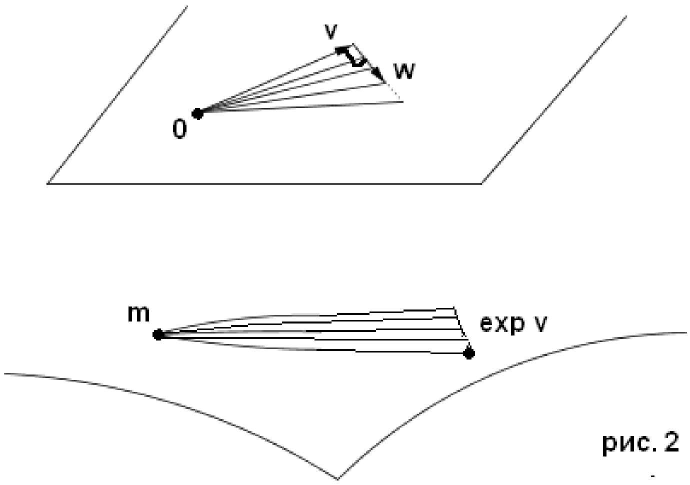


рис. 2

Дано, что дифференциал $(d\exp)_v$ в точке v обладает нетривиальным ядром. Поскольку отображение exp сохраняет длины в радиальном направлении, то ядро оператора $(d\exp)_v$ лежит в ортогональном дополнении $v^\perp$ к вектору v (почему?). Пусть w – ненулевой вектор из ядра. Тогда семейство геодезических $\exp(t(v + sw))$ (см. рис. 2) рождает поле Якоби, сопрягающее точки $\exp(0)$ и $\exp v$ вдоль $\gamma_0(t) = \exp tv$ (проверьте это!). ■

Следствие. Отсутствие сопряженных точек означает невырожденность отображения exp.

Верно и обратное утверждение, которое предлагается в качестве несложного самостоятельного упражнения.

Задача. Пусть точки $\exp(0)$ и $\exp v$ сопряжены вдоль геодезической $\exp tv$. Тогда дифференциал $(d\exp)_v$ вырожден в точке $v \in T_{\exp(0)}M$.

Теорема Картана-Адамара.

Оставим на недолго теорию уравнения Якоби (теорию сопряженных точек) и обратимся к одному яркому приложению всего уже сказанного.

Теорема 4 *(Адамар ($n = 2$) - Картан (произвольное n))*
Пусть M полное связное риманово многообразие неположительной кривизны $\sec \leq 0$. Тогда для любой точки $m \in M$ отображение $\exp_m : T_mM \to M$ является накрытием.

Следствие. Односвязное, связное, полное риманово многообразие M^n неположительной кривизны диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Доказательство этой теоремы проводится по следующей схеме:

1. На M^n отсутствуют сопряженные точки

$$\Downarrow$$

2. $\exp_m$ – это всюду невырожденное отображение $T_mM \to M$

$$\Downarrow$$

3. Всюду невырожденное отображение $\exp_m : T_mM \to M$ индуцирует на T_mM новую метрику («пересадка» метрики с M!), причем $\exp_m$ автоматически является локальной изометрией.

$$\Downarrow$$

4. Новая метрика на T_mM является полной по теореме Хопфа : T_mM служат геодезическими проходящими через точку m и в этой новой метрике (почему?).

Верен следующий приятный факт, состоящий в том, что локальная изометрия $\varphi : M_1 \to M_2$ полных римановых многообразий является накрытием.

Что касается доказательств, то я сделаю первый шаг и намечу последний.

Утверждение 1. На полном связном римановом многообразии неположительной кривизны отсутствуют сопряженные точки.

Доказательство. Если это не так, то существует ненулевое поле Якоби J вдоль геодезической $\gamma(t)$, равное нулю в двух различных точках на геодезической. Посмотрим, как меняется квадрат длины (J, J) поля Якоби вдоль геодезической. Последовательно получаем:

$$\nabla_T(J, J) = 2(\nabla_T J, M)$$

$$\nabla_T^2(J, J) = 2(\nabla_T J, \nabla_J J) + 2(\nabla_T^2 J, J) = 2\left\{-(R(T, J)T, J) + (\nabla_T J, \nabla_T J)\right\}$$

Следовательно, вторая производная функции (J, J) по t неотрицательна, если кривизна $\sec_M \leq 0$. Таким образом, $f(T) = (J, J)$ – выпуклая неотрицательная, отличная от нуля функция. Но такая функция не может иметь двух нулей. Противоречие. ∎

Утверждение 5. Пусть $\varphi : M_1 \to M_2$ – отображение полных римановых многообразий, которое является локальной изометрией. Тогда φ накрытие.

Набросок доказательства. Пусть $m_2 \in M_2$ и $m_1 \in \varphi^{-1}(m_2)$. Прежде всего, нужно заметить, что условие локальной изометрии влечет перестановочность отображений φ и $\exp$, то есть коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} T_{m_1}M_1 \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, "\exp_{M_1}"] & T_{m_2}M_2 \arrow[d, "\exp_{M_2}"] \\ M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Далее, пусть $B^0(m_2, r)$ – великолепный шар для $\exp_{m_2}$. Покажем, что $U = B^0(m_2, r/2)$ есть правильная окрестность накрытия φ, то есть прообраз $\varphi^{-1}(U)$ есть дизъюнктное объединение связных компонент U_i и $\varphi : U_i \to U$ – диффеоморфизм. Пусть U_{m_1} – связная компонента прообраза, содержащая точку m_1, а x и y – различные точки из U_{m_1}, которые отображение φ «склеивает»: $\varphi(x) = \varphi(y)$.

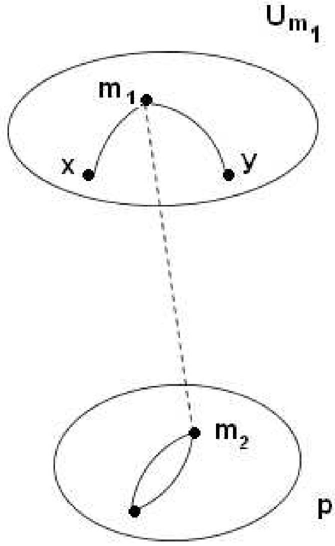


рис. 3

Соединим x и y с точкой m_1 кратчайшими γ_x и γ_y. Кратчайшие целиком лежат в U_{m_1} (почему?). Но тогда точки $\varphi(x) = \varphi(y)$ и m_2 в великолепном шаре будут либо соединены двумя разными геодезическими, либо геодезической с «петелькой», чего в шаре $U = B^0(m_2, r/2)$ не бывает. Следовательно, $\varphi : U_{m_1} \to U = B^0(m_2, r/2)$ – диффеоморфизм. Остается решить следующую задачу.

Задача. Доказать, что $U_n \cap U_{n'} = \varnothing$, для различных связных компонент прообраза $\varphi^{-1}(B^0(m_2, r/2))$.

Некоторые топологические следствия теоремы Адамара-Картана.

• Так как касательное пространство T_mM односвязно, то $\exp_m : T_mM \to M$ – универсальное накрытие. Следовательно, $\pi_i(M) = 0$, $i \geq 2$, то есть M –асферическое пространство типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = \pi_1(M)$. Таким образом, гомотопический тип M полностью контролируется его фундаментальной группой $\pi_1(M)$.

В частности, $H^i(M, \mathbb{Z})$ $H_i(M, \mathbb{Z}) = H^i(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ ($= \mathbb{Z}$ - когомологии абстрактной группы $\pi_1(M)$).

Отметим также, что $M \cong \mathbb{R}^n/\Gamma$, где $\Gamma \cong \pi_1(M)$ – группа накрытия, действующая в $\mathbb{R}^n$ (с новой метрикой!) как дискретная группа изометрий.

• • Если M – многообразие постоянной неотрицательной кривизны, то T_mM изометрично евклидову пространству или пространству Лобачевского.

7 Вторая вариация функционала длины и некоторые ее следствия.

Пусть M – гладкое, полное, связное риманово многообразие.

• Напомним, что мы рассматриваем гладкую вариацию $\varphi: \ [0,l]\times(-\epsilon,\epsilon)\to M$ кривой $\gamma(t)=\varphi(t,0),\ 0\le t\le l$, на многообразии M. Через $T=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,s)$, как обычно, обозначается поле скоростей вдоль кривых вариации $\varphi(t,s),\ \ -\epsilon<s<\epsilon$, а через $V=\frac{\partial}{\partial s}\varphi(t,s)$ – поле скоростей вариации. Рассмотрим функционал длины $L(s)=\int_0^l\|T\|\,dt$. Наша задача – вычислить $\frac{d^2L}{ds^2}(0)$. Это чисто техническое упражнение проделано ниже. Вычисление опирается на два ключевых факта:

1) $\nabla_T V=\nabla_V T$

2)$\nabla_V\nabla_T-\nabla_T\nabla_V=R(T,V)$

Теорема 5 *Предположим, что $\gamma(t)$ – натурально параметризованная геодезическая длины l (это чисто техническое предположение, сильно упрощающее ответ и наиболее полезное в приложениях). Тогда*

$$\left.\frac{d^2L}{ds^2}\right|_{s=0}=\left(\nabla_V V|_{s=0},T\right)\Big|_0^l+\int_0^l\left\{\|\nabla_T V\|^2-(R(T,V)T,V)-\|T,\nabla_T V\|^2\right\}dt \qquad (*)$$

(в этой формуле V и T – это ограничение поля скоростей вариации и поля скоростей вдоль кривых на геодезическую $\gamma(t)$).

Следствие 1. Если поле V вдоль геодезической $\gamma(t)$ ортогонально полю T, то формула $(*)$ принимает вид

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0)=-(V,\nabla_T V)\Big|_0^l+\int_0^l\left\{\|\nabla_T V\|^2-(R(T,V)T,V)\right\}dt \qquad (**)$$

□ В самом деле, в этом случае $(V,T)=0$ вдоль $\gamma(t)$. Поэтому, $\nabla_T(T,V)=(\nabla_T T,V)+(T,\nabla_T V)=(T,\nabla_T V)=0$ (напомним, что $\nabla_T T=0$ по определению геодезической на M). Аналогично, $\nabla_V(T,V)=(\nabla_V T,V)+(T,\nabla_V V)=0$, то есть

$$(T,\nabla_V V)=-(\nabla_V T,V)=-(\nabla_T V,V) \qquad ■$$

Следствие 2. Если к условию $V\perp T$ вдоль $\gamma(t)$ добавить условие $V(0)=V(1)=0$, то формула $(*)$ принимает совсем простой вид:

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0)=\int_0^l\left\{\|\nabla_T V\|^2-(R(T,V)T,V)\right\}dt \qquad (***)$$

• • Займемся выводом формулы ($*$). Последовательно имеем:

$$\frac{dL}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^l \|T\|\,dt=\int_0^l \frac{(\nabla_T V,T)}{\|T\|}dt$$

$$\frac{d^2L}{ds^2}=\frac{d}{ds}\int_0^l \frac{(\nabla_T V,T)}{\|T\|}dt=\int_0^l \nabla_V\left(\frac{(\nabla_T V,T)}{\|T\|}\right)dt$$

Дифференцирование подинтегрального выражения дает:

$$\nabla_V\frac{(\nabla_T V,T)}{\|T\|}=\frac{(\nabla_V\nabla_T V,T)+(\nabla_T V,\nabla_V T)}{\|T\|}-\frac{(\nabla_T V,T)(\nabla_T V,T)}{\|T\|^3}$$

Но $(\nabla_V\nabla_T V,T)=(\nabla_T\nabla_V V+R(T,V)V,T)$. С учетом того, что $\nabla_V T=\nabla_T V$, и $\|T\|=1$ на кривой γ, окончательно получаем, что

$$\frac{d^2L}{ds^2}=\int_0^l\Big\{(\nabla_T\nabla_V V,T)+\|\nabla_T V\|^2-(R(T,V)T,V)-\|T,\nabla_T V\|^2\Big\}\,dt=$$

$$=(\nabla_V V,T)|_0^l+\int_0^l\Big\{\|\nabla_T V\|^2-(R(T,V)T,V)-\|T,\nabla_T V\|^2\Big\}\,dt$$

(объясните последний шаг) ∎

Поскольку $\gamma(t)$ – геодезическая, то $\frac{dL}{ds}(0)=0$, и, разумеется, неравенство $\frac{d^2L}{ds^2}(0)>0$ означает, что в процессе малой деформации вдоль поля V длина кривой $\gamma(t)$ (равная l) возрастает.

Форма индекса и уравнение Якоби.

На проделанное нами вычисление можно взглянуть немного иначе, связав его с уравнением Якоби. Для этого рассмотрим линейное пространство векторных полей X вдоль (натурально параметризованной) геодезической $\gamma(t),\ \ 0\le t\le l$, удовлетворяющих следующим условиям

а) $X\perp\dot\gamma$ (X ортогонально полю скоростей или, короче, поле X ортогонально геодезической).

б) $X(0)=X(l)=0$

Это (бесконечномерное) пространство $\mathcal{O}$ мы снабдим евклидовым скалярным произведением

$$(X_1,X_2)=\int_0^l (X_1,X_2)dt \qquad (\sharp)$$

Легко видеть, что вторая производная по направлению поля вариации X $(=V)$, равная

$$L''_X(0)=\int_0^l\{(\nabla_{\dot\gamma}X,\nabla_{\dot\gamma}X)-(R(\dot\gamma,X)\dot\gamma,X)\}\,dt$$

задает квадратичную форму $I(X,X)$ на пространстве $\mathcal{O}$ (почему?).

Ассоциированная с ней билинейная симметрическая форма $I(X,Y)$ на пространстве $\mathcal{O}$ равна

$$I(X,Y)=\int_0^l \{(\nabla_{\dot\gamma}X,\nabla_{\dot\gamma}Y)-(R(\dot\gamma,X)\dot\gamma,Y)\}\,dt.$$

Но $\nabla_{\dot\gamma}(\nabla_{\dot\gamma}X,Y)=(\nabla^2_{\dot\gamma}X,Y)+(\nabla_{\dot\gamma}X,\nabla_{\dot\gamma}Y)$, и интегрирование по частям дает (проверьте!):

$$I(X,Y)=-\int_0^l (\nabla^2_{\dot\gamma}X+R(\dot\gamma,X)\dot\gamma,Y)dt \qquad (\flat)$$

Определение 4 *Симметрическая билинейная форма на пространстве векторных полей вдоль геодезической γ, заданная формулой «Бемоль», называется* ***индексной формой отрезка*** *геодезической от $t=0$ до $t=l$.*

Замечание. На пространстве $\mathcal{O}$ мы построили две билинейные симметрические формы: (X,Y) и $I(X,Y)$ (форма «Диез» и форма «Бемоль»), причем форма «Диез» положительно определена. Конечномерная теория подсказывает существование в этой ситуации линейного самосопряженного (дифференциального) оператора $\mathcal{I}:\mathcal{O}\to\mathcal{O}$. Оператор, о котором идет речь, задается формулой

$$\mathcal{I}(X)=-\left\{\nabla^2_{\dot\gamma}X+R(\dot\gamma,X)\dot\gamma\right\}$$

По определению, $(\mathcal{I}X,Y)=(X,\mathcal{I}Y)=I(X,Y)$.

• • • Что можно сказать о билинейной форме «Бемоль»? Как выглядит ее ядро? Вспомним, что оператор $\mathcal{I}$ равен нулю ровно на полях Якоби J (полях геодезической вариации). Обозначим через $J^\perp$ пересечение пространства $\mathcal{O}$ с пространством полей Якоби вдоль γ:

$$J^\perp=\mathcal{O}\cap J=\{J\mid J\perp\gamma,\ J(0)=J(l)=0\}.$$

Ясно, что поле Якоби $X\in J^\perp$ лежит в ядре формы «Бемоль» (почему?).

В качестве простого упражнения предлагается доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Поле $X\in\mathcal{O}$ тогда и только тогда лежит в ядре индексной формы, когда $X\in J^\perp$.*

Таким образом, если на отрезке $[\gamma(0),\gamma(l)]$ нет сопряженных точек, то форма $I(X,X)$ невырожденна.

Верно однако и более сильное утверждение, локазанное Якоби.

• Если на отрезке $[\gamma(0),\gamma(l)]$ нет сопряженных точек, то $I(X,X)>0$ для всех ненулевых $X\in\mathcal{O}$

• • Если на интервале $(\gamma(0),\gamma(l))$ нет сопряженных точек, то $I(X,X)\geq 0$, причем $I(X,X)=0\Leftrightarrow X\in J^\perp$.

(доказательство этой теоремы можно найти у Милнора).

История Сингха. Трюк Сингха.

Формула для второй производной в том виде, которым мы привыкли сегодня пользоваться (формула $(*), (**), (***)$), принадлежит J.L.Synge (Proc. London Math Soc., 1926, v. 25, pp. 247-264). Именно он впервые заметил, что в случае гомотопии (= вариация с закрепленными концами)

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \int_0^l \left\{ \|\nabla_{\dot\gamma} V\|^2 - sec(\dot\gamma, V)\,\|V\|^2 \right\} dt \qquad \text{(почему?)}$$

(мы сохраняем предположение о том, что $V \perp \dot\gamma$ вдоль γ).

Следствия из формулы Сингха:

1) если $sec \leq 0$, то геодезическая локально минимизирует длину (т. е. длины всех близких кривых $> l$), даже если она не минимизирует ее глобально (например, γ может быть замкнутой геодезической).

2) с другой стороны, если $sec > 0$, то можно ожидать, разглядывая единичную сферу, что слишком длинные геодезические не минимизируют длину даже локально. В самом деле, выберем на единичной сфере поле скоростей вида $V(t) = \sin(t\frac{\pi}{l})E$, где E – параллельное вдоль геодезической $\gamma(t)$ и ортогональное ей векторное поле единичной длины. Тогда

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \int_0^l \left\{ \|\nabla_{\dot\gamma} V\|^2 - sec(\dot\gamma, V)\,\|V\|^2 \right\} dt =$$

$$= \int_0^l \left\{ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos^2(t\cdot\pi/l) - \sin^2(t\cdot\pi/l) \right\} dt = -\frac{1}{2l}(l^2 - \pi^2) \qquad \text{(напомним, что } sec = 1!)$$

Если длина геодезической больше, чем π, то вторая производная отрицательна, а поэтому существуют близкие гомотопные кривые, которые короче, чем γ.

Развивая свой успех, Сингх заметил, что в случае $sec \geq 1$, аналогичное вычисление приводит к неравенству

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) \leq -\frac{1}{2l}(l^2 - \pi^2)$$

А отсюда следует вывод: если M – полное многообразие, секционная кривизна которого ≥ 1, то его диаметр не превосходит π.

$\square$ В самом деле, любые две точки на M можно соединить кратчайшей геодезической, которая не может минимизировать глобально, если ее длина $> \pi$. $\blacksquare$

Чуточку усилив игру белыми, можно показать, что полное риманово многообразие M, удовлетворяющее условию $sec \geq K^2 > 0$, компактно, причем его диаметр $\leq \pi/K$.

Такой же вывод можно сделать и относительно универсального накрытия $\tilde{M}$ многообразия M. Таким образом, при условии $sec \geq K^2 > 0$ универсальное накрытие $\tilde{M}$ компактно, а значит фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечна.

Трюк Сингха был им придуман в 1936 году для доказательства следующей, и по сей день удивительной, теоремы. Она просто утверждает, что

любое ориентируемое, четномерное, замкнутое риманово многообразие положительной (секционной) кривизны (это означает, что $sec = (R(X,Y)X,Y) > 0$ для любого ненулевого бивектора $X \wedge Y \in \Lambda^2 T_m M$) односвязно.

Почему эта теорема звучит правдоподобно? Если предположить, что $sec\ M^n = const > 0$, то $\tilde{M} = S^n$ – сфера подходящего радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{n+1}$. Группа Γ универсального накрытия $S^n \to M$ состоит из изометрий сферы, т. е. просто из ортогональных преобразований $\mathbb{E}^{n+1}$. Если n четно, то любое сохраняющее ориентацию ортогональное преобразование нечетномерного евклидова пространства $\mathbb{E}^{n+1}$ имеет неподвижную точку. Следовательно, группа $\Gamma = \langle 1 \rangle$, т. е. M односвязно. Если в формулировке теоремы отказаться от ориентируемости, то контрпримером служит неориентируемое риманово многообразие $M = \mathbb{R}P^n = S^n / \langle$антиподальная инволюция$\rangle$.

Сингх доказал свою теорему так:

1. Предположим, что M неодносвязно. Тогда, как учит топология, в каждом свободном гомотопическом классе петель на M найдется петля минимальной длины l, представленная гладкой замкнутой геодезической $\gamma : [0, l] \to M$.

2. Обозначим через P_γ параллельный перенос вдоль замкнутой геодезической γ. Напомним, что P_γ – ортогональное преобразование касательного пространства $T_{\gamma(0)}M$. Так как поле скоростей замкнутой геодезической γ параллельно вдоль γ, то параллельный перенос P_γ сохраняет ортогональное дополнение $(\dot{\gamma}(0))^\perp$ к вектору $\dot{\gamma}(0)$ в пространстве $T_{\gamma(0)}M$ (почему?). Кроме того, из ориентируемости M следует, что $det\ P_\gamma = 1$.

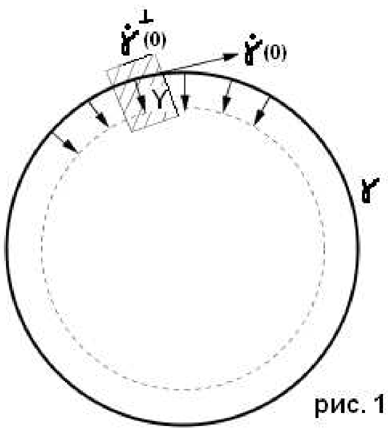


рис. 1

3. Пространство $(\dot{\gamma}(0))^{\perp}$ – нечетномерно, а P_{γ} действует в этом пространстве как ортогональное преобразование с определителем 1. Следовательно, у P_{γ} есть в этом пространстве неподвижный вектор (почему?). Назовем его Y.

4. Пронесем вектор Y параллельно вдоль γ и получим паралельное поле Y, перпендикулярное геодезической.

5. Теперь можно вычислить вторую производную вариации геодезической γ с полем скоростей Y.

   Ответ здесь таков:

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = -\int_0^l \|Y\|^2 \, sec\,(\dot{\gamma}, Y)dt \qquad \text{(почему?)}$$

6. Если $sec > 0$, то вторая производная отрицательна, а это означает, что чуточку сдвинув γ в направлении Y, мы уменьшим длину петли, оставаясь в том же гомотопическом классе. Противоречие.

7. Такие дела.