

Алгебра. 1 курс. Листок 7.

◇ **7.1.** В этой задаче линейное пространство V не обязательно предполагается конечномерным.

- 1) Пусть f — идемпотентный оператор на V . Докажите, что $V = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
- 2) Пусть $V = U \oplus W$. Докажите, что существует единственный идемпотентный оператор $f : V \rightarrow V$, такой что $U = \text{Im } f$, $W = \text{Ker } f$.

◇ **7.2.** Докажите, что каждое из указанных отображений $f : V \rightarrow V$ в себя является идемпотентным линейным оператором и укажите, какое разложение в прямую сумму ему соответствует.

- 1) $V = \text{gl}(n, \mathbb{K})$ (пространство квадратных $n \times n$ матриц с элементами из поля \mathbb{K}), $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$;
- 2) $V = \mathbb{K}[t]$ (докажите, что это пространство бесконечномерно!), $f(P(x)) = \frac{1}{2}(P(t) + P(-t))$;
- 3) $V = \mathbb{R}[t]$, $f(P(x)) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}t + \frac{P''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n$. (Число n фиксировано, $P^{(n)}(x)$ обозначает n -ую производную многочлена $P(x)$.)

Многочлен $f(P(x))$ называется n -ым многочленом Тейлора для многочлена $P(x)$.

◇ **7.3.** Пусть $A \in \text{gl}(n, \mathbb{K})$ — фиксированная диагональная матрица, причем все ее собственные значения различны. Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $f : \text{gl}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \text{gl}(n, \mathbb{K})$ для следующих случаев:

- а) $f(X) = AX$;
- б) $f(X) = AX - XA$;
- в) $f(X) = A^{-1}XA$ (если $\det A \neq 0$).

◇ **7.4.** Найдите все собственные значения и размерности собственных подпространств для операторов из предыдущей задачи в случае, когда A — произвольная матрица, имеющая n различных собственных значений.

◇ **7.5.** Пусть λ — собственное значение линейного оператора f , $Q(t)$ — некоторый многочлен. Докажите, что $Q(\lambda)$ является собственным значением оператора $Q(f)$.

◇ **7.6.** 1) Число 4 является собственным значением линейного оператора f^2 над \mathbb{R} . Верно ли, что у оператора f одно из чисел 2 или -2 является собственным значением?

2) Пусть f — линейный оператор над \mathbb{R} . Может ли оператор f^2 иметь отрицательные собственные значения?

◇ **7.7.** Существует ли линейный оператор в \mathbb{R}^4 , имеющий единственное инвариантное подпространство, отличное от \mathbb{R}^4 и 0 ? Какой может быть размерность этого подпространства?

◇ **7.8.** Рассмотрим оператор дифференцирования на (бесконечномерном) линейном пространстве всех определенных на \mathbb{R} функций, которые можно продифференцировать любое число раз. Найдите в этом пространстве конечномерное инвариантное подпространство, при ограничении на которое оператор дифференцирования

а) будет иметь заданные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$;

б) не будет иметь вещественных собственных значений.

◇ **7.9.** а) Докажите, что множество S всех последовательностей комплексных чисел (т.е. $S = \{(z_1, z_2, \dots, z_n, \dots), z_i \in \mathbb{C}\}$) является линейным пространством над \mathbb{C} . Докажите, что это линейное пространство не является конечномерным.

б) Придумайте пример линейного оператора на S , не имеющего ни одного собственного вектора.

в) Придумайте пример обратимого линейного оператора на S , не имеющего ни одного собственного вектора.

◇ **7.10.** Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора в \mathbb{C}^n , матрица которого имеет вид $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } j - i \equiv 1 \pmod{n} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ (см. задачу 5.5е)

а) для $n = 3$;

б) для произвольного n .

◇ **7.11.** Решите предыдущую задачу для $n = 3$ а) над полем \mathbb{F}_2 ; б) над полем \mathbb{F}_7 .

◇ **7.12.** Пусть U — подпространство конечномерного линейного пространства V , $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Рассмотрим смежные классы $\bar{v}_i = v_i + U \in V/U$.

а) Верно ли, что если векторы v_1, v_2, \dots, v_k линейно независимы, то смежные классы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ тоже линейно независимы?

б) Верно ли, что если смежные классы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ линейно независимы, то векторы v_1, v_2, \dots, v_k тоже линейно независимы?

в) Докажите, что $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

◇ **7.13.** Пусть f — линейный оператор на конечномерном пространстве V , а U — инвариантное подпространство. Рассмотрим отображение $\bar{f} : V/U \rightarrow V/U$, заданное формулой $\bar{f}(v + U) = f(v) + U$. Поставьте между следующими парами утверждений один из знаков " \Leftrightarrow ", " \Rightarrow ", " \Leftarrow " (и докажите, что получились верные теоремы).

а) "оператор f ненулевой" и "оператор \bar{f} ненулевой";

б) "оператор f обратим" и "оператор \bar{f} обратим";

в) "оператор f нильпотентен" и "оператор \bar{f} нильпотентен";

г) $\text{Ker } f \subset U$ и "оператор \bar{f} обратим".

◇ **7.14.** Пусть f — линейный оператор на конечномерном пространстве V .

а) Докажите, что если характеристический многочлен оператора f неприводим, то f не имеет инвариантных подпространств, кроме $\{0\}$ и V .

б)* Докажите, что если f не имеет инвариантных подпространств, кроме $\{0\}$ и V , то характеристический многочлен оператора f неприводим.

в)* Останется ли верным утверждение "а", если в его формулировке характеристический многочлен заменить на минимальный?

г)* Останется ли верным утверждение "б", если в его формулировке характеристический многочлен заменить на минимальный?

◇ **7.15.** Линейный оператор в конечномерном пространстве над \mathbb{C} имеет единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор. Докажите, что в подходящем базисе матрица этого оператора — жорданова клетка.

◇ **7.16.** 1) Докажите, что характеристический многочлен нильпотентного оператора есть t^n , где n — размерность пространства.

2) Докажите, что характеристический многочлен нильпотентного оператора совпадает с его минимальным многочленом тогда и только тогда, когда его матрицей в подходящем базисе является жорданова клетка.

◇ **7.17.** Каким может быть минимальный многочлен и жорданово разложение такого нильпотентного линейного оператора f в \mathbb{R}^8 , что

а) $\dim \text{Ker } f = 2$, $\dim \text{Ker } f^2 = 4$? б) $\dim \text{Ker } f = 2$, $\dim \text{Ker } f^3 = 5$? в) $\dim \text{Ker } f = 5$?

Для каждого случая приведите пример такого оператора.

◇ **7.18.** Рассмотрим конечную строго возрастающую последовательность натуральных чисел $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k < n$. Найдите условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовал нильпотентный оператор f на n -мерном линейном пространстве, такой что $d_m = \dim \text{Ker } f^m$.

◇ **7.19.** а) Пусть линейные операторы f и g над \mathbb{C} коммутируют (т.е. $f \circ g = g \circ f$). Докажите, что у f и g имеется общий собственный вектор.

б)** Докажите, что если два линейных оператора f и g над \mathbb{C} таковы, что $\text{rank}(f \circ g - g \circ f) \leq 1$, то у f и g имеется общий собственный вектор.

◇ **7.20.** Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_n = \{P(t) \in \mathbb{R}[t], \deg P \leq n\}$ многочленов степени не выше n и оператор первой разности $\Delta : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ (напомним, что, по определению, $\Delta(P(t)) = P(t+1) - P(t)$). Найдите жорданову форму и жорданов базис для оператора Δ .

◇ **7.21.** Докажите, что следующие три свойства линейного оператора f равносильны:

1) минимальный многочлен совпадает с характеристическим;

2) каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка;

3) любой оператор, перестановочный с f , является линейной комбинацией степеней f .