Экзамен по классическим группам 24.12.2011

1. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — ортонормальный базис V относительно квадратичной формы Q. Пусть $a+b > m$. Докажите, что $\Lambda^a V \otimes \Lambda^b V \subset V^{\otimes a+b}$ содержится в образе $\Psi : V^{\otimes a+b-2} \to V^{\otimes a+b}$, где $\Psi(w) = w \otimes \sum_{i=1}^m v_i \otimes v_i$.

2. Группы $GL(V)$ и $GL(W)$ естественно действуют в $V \otimes W$. Пусть $A \subset \mathrm{End}(V \otimes W)$ (соотв. B) — алгебра линейных комбинаций операторов из $GL(V)$ (соотв. $GL(W)$). Докажите, что A является коммутантом B, а B является коммутантом A в $\mathrm{End}(V \otimes W)$.

3. Пусть E_{ij} — $n \times n$-матрица, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит единица, а остальные нули. Докажите, что детерминант Капелли $C_n = \begin{vmatrix} E_{11}+n-1 & E_{12} & E_{13} & \ldots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22}+n-2 & E_{23} & \ldots & E_{2n} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33}+n-3 & \ldots & E_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & E_{n3} & \ldots & E_{nn} \end{vmatrix}$ (слагаемые определителя читаются слева направо) как элемент универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$ обладает свойством $E_{ij} C_n = C_n E_{ij}$ для всех i, j. Таким образом, C_n лежит в центре $U(\mathfrak{gl}_n)$ (и является его образующей старшей степени).

4. Любая группа Вейля полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ порождена отражениями в картановской алгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Согласно теореме Шевалле, алгебра W-инвариантных функций на $\mathfrak{h}$ является алгеброй многочленов. Найдите какие-нибудь образующие этой алгебры для случая a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$; b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8$.

5. Постройте явные изоморфизмы $\mathbb{H} \simeq \mathrm{Clif}^+_{\mathbb{R}}(0,3)$ и $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}^1$ (кватернионы нормы 1).

6. Докажите, что вещественная алгебра Клиффорда $\mathrm{Clif}(4,0) \simeq \mathrm{Clif}(0,4) \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H})$.