Листок 11 Алгебра 2 3 Модуль

1. Для нечетного N постройте $\frac{N-1}{2}$ неизоморфных двумерных неприводимых представлений циклической группы C_N над $\mathbb{R}$.

2. Для четного N постройте $\frac{N-2}{2}$ неизоморфных двумерных неприводимых представлений циклической группы C_N над $\mathbb{R}$ и одно нетривиальное одномерное.

3. Для $d|N$ определите на круговом поле F_d структуру неприводимого представления циклической группы C_N над $\mathbb{Q}$.

Прямой суммой $\bigoplus A_i$ колец (или алгебр) A_i называется их декартово произведение как множеств с покомпонентными операциями сложения и умножения (а также умножения на скаляры для алгебр).

4. Для нечетного N докажите что групповая алгебра циклической группы $\mathbb{R}[C_N] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$, ($\frac{N-1}{2}$ слагаемых $\mathbb{C}$).

5. Для четного N докажите что групповая алгебра циклической группы $\mathbb{R}[C_N] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$, ($\frac{N-2}{2}$ слагаемых $\mathbb{C}$).

6. Докажите что групповая алгебра циклической группы $\mathbb{Q}[C_N] = \bigoplus_{d|N} F_d$, где F_d обозначает круговое поле.

7*. Докажите, что групповая алгебра циклической группы C_4 над полем гауссовых чисел F_4 $F_4[C_N] = F_4 \oplus F_4 \oplus F_4 \oplus F_4$.

8*. Докажите, что групповая алгебра кватернионной группы Q_8 $\mathbb{R}[Q_8] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ обозначает гамильтоновы кватернионы.