Домашнее задание 1 Алгебра 2 3 Модуль

Векторные пространства предполагаются конечномерными

Для $\mathbb{R}$ векторного пространства V определим $\mathbb{C}$ векторное пространство $V_{\mathbb{C}}^{(1)}$ – его *комплексификацию* первым способом следующим образом. Выбор базиса отождествляет V с пространством вещественных вектор-столбцов. Тогда $V_{\mathbb{C}}^{(1)}$ – это комплексные вектор-столбцы той же высоты.

1. Докажите что $V_{\mathbb{C}}^{(1)}$ не зависит от выбора базиса, то есть для различных выборов базиса имеется естественное отождествление получившихся комплексификаций.

Для $\mathbb{R}$-линейного отображения $\phi : V \to W$ его комплексификация $\phi_{\mathbb{C}}^{(1)} : V_{\mathbb{C}}^{(1)} \to W_{\mathbb{C}}^{(1)}$ задается той же матрицей что и ϕ в выбранном базисе.

Для $\mathbb{R}$ векторного пространства V определим $\mathbb{C}$ векторное пространство $V_{\mathbb{C}}^{(2)}$ – его *комплексификацию* вторым способом следующим образом. Как множество, $V_{\mathbb{C}}^{(2)}$ есть $V \times V$ с покомпонентным сложением и умножением на вещественные числа, а умножение на i задается как $(u, v) \to (-v, u)$.

2. Докажите что $V_{\mathbb{C}}^{(2)}$ является $\mathbb{C}$-векторным пространством.

Для $\mathbb{R}$-линейного отображения $\phi : V \to W$ его комплексификация $\phi_{\mathbb{C}}^{(2)} : V_{\mathbb{C}}^{(2)} \to W_{\mathbb{C}}^{(2)}$ определяется как покомпонентное применение ϕ.

3.Докажите что $\phi_{\mathbb{C}}^{(2)}$ $\mathbb{C}$-линейно

Для $\mathbb{R}$ векторного пространства V определим $\mathbb{C}$ векторное пространство $V_{\mathbb{C}}^{(2)}$ – его *комплексификацию* третьим способом как $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, умножение на комплексные числа определяется как умножение первого сомножителя, а применение линейного оператора $\phi : V \to W$ действует на второй сомножитель.

4. Докажите эквивалентность первого и третьего определения комплексификации для векторных пространств и линейных отображений.

5. Докажите эквивалентность второго и третьего определения комплексификации для векторных пространств и линейных отображений.