Динамические системы. Экзамен. Вариант I.

Задача 1. а) Найти особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

б) Для особой точки с наибольшей абсциссой выписать линеаризованную в этой точке систему уравнений;

в) Определить тип особой точки получившейся линеаризации, устойчива ли она по Ляпунову?

г) Найти площадь образа квадрата $[0,2] \times [0,2]$ под действием отображения за время 1 для фазового потока линеаризованной системы.

Задача 2. Найти производную решения уравнения $\ddot{x} = \dot{x}^2 + 2ax^3$ с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру a при $a = 0$.

Задача 3. Найти линейные однородные дифференциальные уравнения наименьшего порядка, имеющие частные решения $3te^t, 2e^{-t}$.

Задача 4. а) Указать первый интеграл уравнения $\ddot{x} = 2x - x^2 - x^3$;

б) Нарисовать фазовый портрет этого уравнения.

Задача 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \varepsilon(2 + 3\sin(t))xy \\ \dot{y} = -2y + \varepsilon(x^2y^3 + 1) \end{cases}$$

а) Найти при $\varepsilon = 0$ дифференциал отображения фазового потока этой системы за время 2π;

б)* Доказать, что при достаточно малом ε эта система имеет 2π-периодическое решение (гладко зависящее от ε) , обращающееся в $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$ при $\varepsilon = 0$.