

Логика и алгоритмы 2011. Задание 10.

Вычислимость и невычислимость.

Обозначения. $\varphi_e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ означает вычислимую (частичную) функцию с номером e ; $\varphi_e(x)$ есть значение φ_e на аргументе x , если оно определено; $!\varphi_e(x)$ означает, что $\varphi_e(x)$ определено. Частичная функция f *тотальна*, если для всех $x \in \mathbb{N}$ значение $f(x)$ определено. $f(x) \simeq g(x)$ означает, что значения функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают или же оба не определены.

138. Докажите, что функция $f(x) = \varphi_x(x)$ вычислима, но не имеет тотального вычислимого продолжения. Можно ли как-нибудь расширить область определения функции f , сохранив её вычислимость?
139. Докажите, что если g — вычислимая функция, не имеющая тотального вычислимого продолжения, то $\text{dom}(g) = \{x \mid !g(x)\}$ — перечислимое, неразрешимое множество.
140. Пара множеств $A, B \subset \mathbb{N}$ называется *неотделимой*, если не существует такого разрешимого множества C , что $A \subset C$ и $B \subset \mathbb{N} \setminus C$.
- (а) Докажите, что существует неотделимая пара не пересекающихся перечислимых подмножеств \mathbb{N} .
- (б) Докажите, что существуют три попарно не пересекающихся перечислимых подмножества \mathbb{N} таких, что никакое из них не отделимо от объединения двух других.

Указание: пары не пересекающихся перечислимых множеств соответствуют частичным вычислимым функциям $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Воспользуйтесь функцией, не имеющей тотального вычислимого продолжения.

141. (сводимость) Множество A *m -сводимо к B* (записываем $A \leq_m B$), если существует тотальная вычислимая функция f такая, что $\forall x (x \in A \iff f(x) \in B)$.¹

Для подмножеств \mathbb{N} докажите:

- (а) Отношение \leq_m рефлексивно и транзитивно.
- (б) Если $A \leq_m B$ и B разрешимо, то A разрешимо. Если $A \leq_m B$ и B перечисливо, то A перечисливо.
- (с) Для любых множеств A, B найдётся C такое, что $A, B \leq_m C$ и для любого D , если $A, B \leq_m D$, то $C \leq_m D$.

¹ f «сводит» вопрос о принадлежности x к A к вопросу о принадлежности x к B .

(d) Если A перечислимо, то $A \leq_m K$, где $K = \{x \in \mathbb{N} \mid !\varphi_x(x)\}$.

Указание: Сначала докажите это же утверждение для множества

$$K_0 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ и } !\varphi_x(y)\}.$$

Функцию, сводящую A к K , постройте с помощью леммы о параметризации (см. задачу 143).

142. (a) Приведите пример неперечислимого множества.
(b) Приведите пример неперечислимого множества, дополнение которого также не перечислимо.
143. (лемма о параметризации) Пусть $f(x, y)$ — вычислимая функция двух аргументов. Тогда существует тотальная вычислимая функция $s(x)$ такая, что $\forall x, y \ f(x, y) \simeq \varphi_{s(x)}(y)$. Опишите работу алгоритма для функции s .
144. Докажите неразрешимость следующих множеств:
(a) $\{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(0) = 0\}$
(b) $\{x \in \mathbb{N} \mid !\varphi_x(0)\}$
(c) $\{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \ \varphi_x(y) \neq 0\}$

Указание: сведите к этим множествам множество K или его дополнение.

145. Докажите, что множество $\{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ тотальна}\}$ не перечислимо.
146. (теорема Райса–Успенского) Пусть \mathcal{C} — семейство одноместных вычислимых функций, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ и существует $f \notin \mathcal{C}$. Тогда множество $I = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{C}\}$ неразрешимо.
Указание: Можно считать, что нигде не определённая функция $\zeta \in \mathcal{C}$ (иначе перейдём к дополнению \mathcal{C}). Рассмотрите вычислимую функцию

$$g(x, y) = \begin{cases} f(y), & \text{если } !\varphi_x(x), \\ \text{не определено,} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Примените лемму о параметризации к g , полученная функция s сводит K к I .

147. (busy beaver) Рассмотрим функцию $Bv : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, определяемую следующим образом. Значение $Bv(n)$ равно длине самой длинной последовательности единиц, которую может выписать (остановившись) некоторая машина Тьюринга с n состояниями и ленточным алфавитом $\{0, 1\}$, начинающая работу в конфигурации, когда все ячейки ленты заполнены нулями. Докажите, что функция Bv не является вычислимой.