Глава 7

Линейные расслоения, линейные системы и дивизоры

Нам уже встречались линейные расслоения над кривыми — тривиальное расслоение, касательное, кокасательное и их тензорные степени. В связи с этим возникает естественный вопрос — есть ли над данной кривой другие линейные расслоения. Скажем, над эллиптическими кривыми все упомянутые выше линейные расслоения тривиальны, и поставленный вопрос означает, в частности, есть ли над данной эллиптической кривой нетривиальные расслоения.

В этой главе мы обсудим связь между линейными расслоениями над кривой и наборами точек на ней — дивизорами. Язык дивизоров позволяет эффективно описывать все линейные расслоения и работать с ними. Мы также обсудим, как с помощью линейного расслоения над кривой строить ее отображения в различные проективные пространства.

7.1 Дивизор мероморфного сечения линейного расслоения

С каждым мероморфным сечением линейного расслоения над кривой C естественно связаны два набора точек — нули и полюса этого сечения. При этом каждой точке этих наборов приписана целочисленная кратность. В окрестности любой точки сечение линейного расслоения описывается мероморфной функцией, и кратность точки это соответственно порядок нуля или порядок полюса этой функции. Порядок нуля мы считаем положительным, а порядок полюса — отрицательным. Формальная сумма нулей сечения σ с учетом их порядков называется *дивизором нулей* сечения и обозначается через $(\sigma)_0$. Формальная сумма полюсов сечения σ с учетом их порядков называется *дивизором полюсов* сечения и обозначается через $(\sigma)_\infty$. Формальная сумма нулей и полюсов сечения σ с учетом их порядков называется *дивизором* сечения и обозначается через $(\sigma) = (\sigma)_0 + (\sigma)_\infty$.

Пример 7.1.1. Пусть $C = \mathbb{CP}^1$ — проективная прямая с координатой z. Дивизор постоянной ненулевой функции на ней равен нулю, $(\mathrm{const}) = 0$. Дивизор функции z равен $(z) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot \infty$, поскольку функция z имеет нуль первого порядка в точке 0 и полюс первого порядка в точке ∞. Дивизор дифференциальной 1-формы $\omega = dz$ равен $(dz) = -2 \cdot \infty$, а дивизор двойственного ей векторного поля $\partial/\partial z$ равен $(\partial/\partial z) = 2 \cdot \infty$.

Упражнение 7.1.2. Пусть p, q — две различные точки эллиптической кривой C. Может ли дивизор мероморфной функции на C иметь вид $p - q$?

Упражнение 7.1.3. Определите дивизоры нулей и полюсов следующих объектов: а) многочлена z на $\mathbb{CP}^1$; б) 1-формы $(z-1)dz$ на $\mathbb{CP}^1$; в) векторного поля d/dz на $\mathbb{CP}^1$; г) функции Вейерштрасса на эллиптической кривой; д) функции, заданной проекцией на ось x кривой Ферма $x^n + y^n = 1$; е) функции, заданной проекцией на ось x квадрики Клейна $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$.

Дадим общее определение дивизора на кривой.

Определение 7.1.4. *Дивизором* на кривой C называется формальная конечная линейная комбинация $\sum a_i x_i$ точек этой кривой.

Другой, и зачастую более удобный, способ обозначения дивизоров состоит в том, чтобы записывать их в виде суммы $\sum_{x \in C} a_x x$ по *всем* точкам кривой C, в которой лишь *конечное* число коэффициентов отлично от нуля. В дальнейшем мы будем рассматривать только дивизоры с целыми коэффициентами, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Дивизоры можно складывать — суммирование дивизоров сводится к суммированию коэффициентов у точек кривой, — и они образуют коммутативную группу относительно операции сложения. Нулем в этой группе является нулевой дивизор.

Пусть теперь $\sigma_1 : C \to E$ и $\sigma_2 : C \to E$ — два ненулевых мероморфных сечения одного и того же линейного расслоения E над кривой C. Поскольку расслоение E линейно (т.е. его слои одномерны), каждое из этих сечений пропорционально другому, т.е. является результатом умножения другого сечения на мероморфную функцию, $\sigma_2 = f\sigma_1$ для некоторой функции f. Записывая сечения σ_1, σ_2 и функцию f в локальной координате, убеждаемся, что $(\sigma_2) = (\sigma_1) + (f)$ — дивизор сечения σ_2 является суммой дивизоров сечения σ_1 и функции f.

Наоборот, если $\sigma : C \to E$ — сечение линейного расслоения и f — произвольная мероморфная функция на кривой C, то $f\sigma$ также является сечением расслоения E, причем $(f\sigma) = (f) + (\sigma)$. Тем самым, дивизоры любых двух сечений данного линейного расслоения отличаются друг на друга на дивизор мероморфной функции, а прибавляя к дивизору сечения дивизор некоторой мероморфной функции, мы также получаем дивизор сечения того же расслоения.

Поэтому в группе дивизоров естественно ввести следующее отношение эквивалентности: два дивизора D_1, D_2 называются *линейно эквивалентными*, если на кривой существует мероморфная функция f с дивизором $D_1 - D_2$.

Упражнение 7.1.5. Проверьте, что сложение дивизоров индуцирует структуру группы на множестве классов линейной эквивалентности дивизоров.

Факторгруппа группы дивизоров кривой C по отношению линейной эквивалентности называется ее *группой Пикара* и обозначается через $\mathrm{Pic}(C)$. Всякому линейному расслоению над данной кривой соответствует элемент ее группы Пикара — класс линейной эквивалентности дивизоров голоморфных сечений этого расслоения.

7.2 Степень дивизора и степень расслоения

У дивизора есть важная количественная характеристика — его степень. *Степенью дивизора* $D = \sum a_i p_i$ называется сумма $\sum a_i$ его коэффициентов. Это целое число, которое обычно обозначают $\deg D$. Степень является эпиморфизмом из группы классов дивизоров в группу целых чисел по сложению. Отсюда вытекает, в частности, что классы дивизоров степени 0 образуют подгруппу в группе классов дивизоров. Для данной кривой C эта подгруппа обозначается через $\mathrm{Pic}_0(C)$; более общим образом, совокупность классов дивизоров данной степени d, $d \in \mathbb{Z}$, обозначается $\mathrm{Pic}_d(C)$, и вся группа Пикара представляется в виде несвязного объединения

$$\mathrm{Pic}(C) = \cdots \sqcup \mathrm{Pic}_{-2}(C) \sqcup \mathrm{Pic}_{-1}(C) \sqcup \mathrm{Pic}_0(C) \sqcup \mathrm{Pic}_1(C) \sqcup \mathrm{Pic}_2(C) \sqcup \dots .$$

Всякое подмножество $\mathrm{Pic}_d(C)$ в группе Пикара допускает представление в виде $\mathrm{Pic}_d(C) = D + \mathrm{Pic}_0(C)$, где $D \in \mathrm{Pic}_d(C)$ — произвольный класс дивизоров. Поэтому структура любого подмножества $\mathrm{Pic}_d(C)$ совпадает, по сути дела, со структурой группы $\mathrm{Pic}_0(C)$, хотя отождествление и не является каноническим, а зависит от выбора элемента $D \in \mathrm{Pic}_d(C)$. Как следствие, знание группы $\mathrm{Pic}_0(C)$ дает описание и всей группы $\mathrm{Pic}(C)$.

Степень дивизора любой мероморфной функции равна 0, поскольку количество прообразов нуля и количество прообразов бесконечности, с учетом кратности, для любой функции совпадают и равны ее степени. Поэтому линейно эквивалентные дивизоры имеют одинаковую степень, а значит все сечения данного линейного расслоения также имеют одинаковую степень. Эта общая степень называется *степенью расслоения*.

Дивизоры мероморфных функций называются *главными дивизорами*. Они составляют класс эквивалентности нуля относительно линейной эквивалентности. Заметим, что при $g \geq 0$ из того, что степень дивизора равна нулю, не вытекает, вообще говоря, что этот дивизор является главным.

Упражнение 7.2.1. Докажите, что любые два дивизора одинаковой степени на проективной прямой линейно эквивалентны. Другими словами, группа $\mathrm{Pic}_0(\mathbb{CP}^1)$ тривиальна, а группа $\mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^1)$ изоморфна $\mathbb{Z}$.

Пример 7.2.2. Если кривая вложена в проективное пространство, то на ней можно определить класс дивизоров гиперплоского сечения. Представителем этого класса является любой дивизор пересечения кривой с гиперплоскостью, не содержащей этой кривой. Любые два таких дивизора линейно эквивалентны. Действительно, пусть две гиперплоскости задаются однородными линейными уравнениями $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$. Тогда ограничение частного F_1/F_2 на нашу кривую является мероморфной функцией на ней, устанавливающей эквивалентность двух дивизоров. Аналогично, на проективной кривой определен класс дивизоров, отвечающих ее сечениям гиперповерхностями заданной фиксированной степени k.

Упражнение 7.2.3. Выразите степень класса дивизоров гиперплоских сечений проективной кривой через степень самой кривой.

Степень касательного расслоения к кривой рода g равна эйлеровой характеристике поверхности C, т.е. $\deg(TC) = \chi(C) = 2 - 2g$. Действительно, эйлерову характеристику многообразия можно определять как сумму индексов особых точек векторного поля общего положения на нем. В свою очередь, особые точки голоморфного векторного поля на кривой это в точности его нули и полюса, причем их индексы — это порядки нулей и полюсов соответственно.

Упражнение 7.2.4. Проверьте, что если голоморфное векторное поле на кривой в окрестности своей особой точки имеет вид $z^k\partial/\partial z$, то индекс этого поля в этой точке равен k.

При тензорном умножении линейных расслоений соответствующие им классы дивизоров в группе Пикара складываются. Действительно, если $E \to C$ и $F \to C$ — голоморфные линейные расслоения и $\sigma : C \to E$, $\tau : C \to F$ — их голоморфные сечения, то тензорное произведение $E \otimes F \to C$ допускает голоморфное сечение $\sigma \otimes \tau : C \to E \otimes F$. Дивизор этого тензорного произведения представляет собой сумму дивизоров сомножителей, $(\sigma \otimes \tau) = (\sigma) + (\tau)$, что и дает требуемое утверждение. Разумеется, степени линейных расслоений при их тензорном умножении также складываются.

Поскольку кокасательное расслоение к кривой двойственно касательному, их тензорное произведение является тривиальным линейным расслоением. Это означает, в частности, что его степень равна 0. Поэтому степень кокасательного расслоения равна $-\chi(C) = 2g(C) - 2$; она положительна при $g(C) \geq 2$. Класс дивизоров кокасательного расслоения называется *каноническим классом*, а его элементы — *каноническими дивизорами*.

7.3 Тавтологическое линейное расслоение над проективной прямой

Над проективным пространством любой размерности есть так называемое *тавтологическое линейное расслоение*. Оно определяется следующим образом. Проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ это пространство прямых в векторном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Линейное расслоение $\mathcal{O}(-1)$ над $\mathbb{CP}^n$ это расслоение, слоем которого над данной точкой проективного пространства является та самая прямая в $\mathbb{C}^{n+1}$, которая определяет эту точку. Тотальное пространство расслоения $\mathcal{O}(-1)$ можно представлять себе как подмногообразие в $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$, состоящее из пар (точка в $\mathbb{CP}^n$, точка на соответствующей прямой в $\mathbb{C}^{n+1}$).

При $n = 1$ описанная конструкция дает линейное расслоение $\mathcal{O}(-1)$ над проективной прямой $\mathbb{CP}^1$. Сечение этого расслоения можно построить, взяв произвольную прямую ℓ в $\mathbb{C}^2$, не проходящую через начало координат. Эта прямая пересекает в одной точке каждую прямую, проходящую через начало координат, за исключением единственной прямой ℓ', которая параллельна прямой ℓ.

Упражнение 7.3.1. Докажите, что точки пересечения прямой ℓ с прямыми, проходящими через начало координат, определяют мероморфное сечение $\mathbb{CP}^1 \to \mathcal{O}(-1)$ расслоения $\mathcal{O}(-1)$. Проверьте, что это сечение не имеет нулей и имеет единственный полюс в точке $\ell' \in \mathbb{CP}^1$, причем порядок этого полюса равен 1.

Это упражнение показывает, что расслоение $\mathcal{O}(-1)$ имеет степень -1. Оно не может, тем самым, быть тривиальным, касательным или кокасательным. Двойственное к тавтологическому расслоению расслоение $\mathcal{O}(1)$ имеет степень 1. Тензорные степени этих расслоений обозначаются через $\mathcal{O}(-1)^{\otimes d} = \mathcal{O}(-d)$ и $\mathcal{O}(1)^{\otimes d} = \mathcal{O}(d)$, где d — целое неотрицательное число. Степень расслоения $\mathcal{O}(d)$ равна d. Ниже мы увидим, что расслоение $\mathcal{O}(2)$ изоморфно касательному расслоению к проективной прямой, а $\mathcal{O}(-2)$ — кокасательному расслоению к ней.

7.4 Восстановление линейного расслоения по классу дивизора

Оказывается, сопоставление линейному расслоению класса дивизоров его сечений обратимо — каждому классу линейной эквивалентности дивизоров однозначно сопоставляется голоморфное линейное расслоение, класс дивизоров сечений которого совпадает с данным. Для описания этого соответствия дадим, наконец, строгое определение линейного расслоения.

Определение 7.4.1. Пусть C — гладкая комплексная кривая. Голоморфное отображение $\pi : E \to C$ двумерной комплексной поверхности в C называется ***линейным расслоением***, если у каждой точки в C существует открытая окрестность $U \subset C$, такая, что прообраз $\pi^{-1}(U)$ допускает тривиализацию, т.е. существует биголоморфное отображение $\varphi : U \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U)$, причем для всех $x \in U$

- $\pi \circ \varphi(x, c) = x$ для всех $c \in \mathbb{C}$;
- отображение $c \mapsto \varphi(x, c)$ является изоморфизмом прямой $\mathbb{C}$ на слой $\pi^{-1}(x)$.

Два линейных расслоения $\pi_1 : E_1 \to C$ и $\pi_2 : E_2 \to C$ над кривой C называются *изоморфными*, если существует биголоморфное отображение $h : E_1 \to E_2$, такое, что $\pi_2 = h \circ \pi_1$.

Пусть $\pi : E \to C$ — голоморфное линейное расслоение, U, V — два открытых подмножества в C и заданы тривиализации $\varphi_U : U \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U)$, $\varphi_V : V \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(V)$ расслоения E над U и над V соответственно. Тогда над пересечением $U \cap V$ возникает отображение

$$\varphi_V^{-1} \circ \varphi_U(x, c) = (x, f_{UV}(x)).$$

Здесь $f_{UV}(x)$ — некоторая голоморфная функция. Функции f_{UV} для данного набора тривиализаций называются *функциями перехода*. Если кривая C покрыта открытыми множествами $U_1, \dots, U_m$, то набор функций перехода между тривиализациями над этими множествами полностью определяет линейное расслоение.

Упражнение 7.4.2. Докажите, что на пересечении трех открытых множеств U, V, W функции перехода для тривиализаций данного линейного расслоения удовлетворяют условию

$$f_{UV}(x) f_{VW}(x) f_{WU}(x) = 1.$$

Ниже мы предполагаем, не доказывая этот факт, что у каждого голоморфного линейного расслоения есть хотя бы одно мероморфное сечение (можно считать также, что мы ограничиваемся рассмотрением лишь таких расслоений).

Теорема 7.4.3. *Для каждого класса линейной эквивалентности дивизоров $D \in \mathrm{Pic}(C)$ на данной гладкой компактной комплексной кривой C существует единственное линейное расслоение над C, класс дивизоров сечений которого совпадает с D.*

Расслоение, о котором идет речь в теореме, обозначается через $\mathcal{O}(D)$. Поскольку на проективной прямой все дивизоры одинаковой степени линейно эквивалентны, это обозначение согласовано с обозначением $\mathcal{O}(d)$.

Доказательство. Построим расслоение $\mathcal{O}(D)$ явно. Пусть $x_1, \dots, x_m$ — точки кривой C, входящие в дивизор D с ненулевыми коэффициентами. Рассмотрим покрытие $U_1, \dots, U_m, W$ кривой C открытыми множествами, состоящее из m маленьких дисков U_i с центрами в точках x_i и кривой C, проколотой в этих точках, $W = C \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. При этом диски U_i мы выбираем настолько малыми, чтобы никакие два из них не пересекались между собой.

Выберем в каждом диске U_i произвольную голоморфную локальную координату z_i. Над каждым проколотым диском $U_i \cap W$ склеим тривиальные линейные расслоения над U_i и над W с помощью функции перехода $z_i^{-a_i}$, где a_i — кратность точки x_i в дивизоре D, $D = \sum a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$. При такой склейке тождественное сечение тривиального линейного расслоения над W

продолжается до мероморфного сечения построенного линейного расслоения над C, дивизор которого совпадает с D. Мы будем обозначать это расслоение через $\mathcal{O}(D)$.

Теперь заметим, что линейное расслоение, класс дивизоров сечений которого равен нулю, тривиально. Действительно, пусть σ — какое-нибудь мероморфное сечение этого расслоения; его дивизор (σ) совпадает с дивизором некоторой мероморфной функции f, $(\sigma) = (f)$. Поэтому сечение $\frac{1}{f}\sigma$ не имеет ни нулей, ни полюсов, а значит тривиализует наше расслоение.

Пусть теперь класс дивизоров сечений данного расслоения $E \to C$ равен $D \in \mathrm{Pic}(C)$. Тогда класс дивизоров сечений линейного расслоения $E \otimes \mathcal{O}(-D)$ равен нулю, т.е. это расслоение тривиально. Поэтому $E = \mathcal{O}(D)$, а значит, мы описали все линейные расслоения над C. □

7.5 Отображения кривых в проективное пространство, связанные с линейными расслоениями

Если мы зафиксировали линейное расслоение и выбрали $p+1$ его сечений, то по этим данным мы можем построить отображение нашей кривой в p-мерное проективное пространство. Пусть $L \to C$ — линейное расслоение над кривой, $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_p$ — набор его мероморфных сечений. Тогда отображение $C \to \mathbb{CP}^p$, $x \mapsto (\sigma_0(x) : \sigma_1(x) : \dots : \sigma_p(x))$ определено корректно всюду, кроме тех точек, где все сечения одновременно обращаются в нуль или в бесконечность. Действительно, в любой точке кривой любые два вектора в слое нашего расслоения пропорциональны друг другу с комплексным коэффициентом пропорциональности.

Упражнение 7.5.1. Проверьте, что если хотя бы одно из сечений σ_i не равно нулю тождественно, то отображение кривой в проективное пространство, определенное изначально на дополнении к множеству общих нулей и полюсов всех сечений, продолжается до голоморфного отображения всей кривой.

Такое отображение особенно привлекательно и естественно выглядит в случае, когда L — кокасательное расслоение, а в качестве сечений мы выбираем произвольный базис $\omega_1, \dots, \omega_g$ пространства голоморфных 1-форм. Образ такого отображения определен однозначно с точностью до проективной замены координат: такая замена определяется заменой выбранного базиса в пространстве голоморфных 1-форм. В силу подобной однозначности этот образ называется *канонической кривой*, а само отображение кривой называется *каноническим отображением*. Как мы увидим впоследствии, каноническое отображение почти всегда является вложением.

Упражнение 7.5.2. Почему каноническое отображение строится по кокасательному расслоению, а не по тривиальному или касательному?

Отображения, аналогичные каноническому, можно построить и по тензорным степеням кокасательного расслоения. Они называются *плюрика-*

ноническими отображениями. Если тензорную степень взять достаточно высокой (например, равной 3), то плюриканоническое отображение будет вложением уже на любой кривой (при $g \geq 2$).

7.6 Линейные системы и отображения кривых

Голоморфные дифференциалы — не единственное конечномерное пространство, ассоциированное с комплексной кривой. Если снизить требования к естественности, то мы можем рассмотреть над кривой много разных конечномерных пространств сечений линейных расслоений. Такие пространства связываются с дивизорами на кривой.

Назовем дивизор $\sum a_i x_i$ *эффективным*, если все его коэффициенты a_i положительны, $a_i > 0$ (или неотрицательны, если мы суммируем по всем точкам кривой). Нулевой дивизор также будем считать эффективным. Эффективность дивизора D мы будем выражать записью $D \geq 0$. Эффективные дивизоры образуют конус — их можно складывать и умножать на положительные числа, однако разность двух эффективных дивизоров может быть не эффективным дивизором. Для произвольного линейного расслоения над кривой C и фиксированного дивизора D мы можем рассмотреть множество таких сечений σ этого расслоения, что $(\sigma) + D \geq 0$. Это множество сечений образует конечномерное векторное пространство относительно естественных операций на сечениях. Таким способом мы значительно расширяем набор векторных пространств, ассоциированных с данной кривой.

Пусть D — дивизор на кривой C. Рассмотрим все рациональные функции f, для которых дивизор $(f) + D$ эффективен. Эти функции образуют конечномерное векторное пространство, которое мы обозначим через $L(D)$. Его можно отождествить с пространством голоморфных сечений линейного расслоения $\mathcal{O}(D)$. Размерность пространства $L(D)$ обозначается через $l(D)$.

Пример 7.6.1. Пусть D — дивизор неотрицательной степени на сфере Римана. Запишем его в виде $D = \sum a_i p_i + a_\infty \infty$. Положим $f_D(z) = \prod (z - a_i)^{-p_i}$. Тогда пространство $L(D)$ состоит из функций вида $P(z) f_D(z)$, где $P(z)$ — многочлен степени не выше $\deg D$.

Доказательство. Пусть $P(z)$ — многочлен степени n. Тогда $(P) \geq -n\infty$. Ясно также, что $(f_D) = \sum(-a_i p_i) + (\sum a_i)\infty$. Поэтому $(Pf_D) + D \geq \sum(-a_i p_i) + (\sum a_i)\infty + \sum(-a_i p_i) + (\sum a_i)\infty - n\infty \geq (\sum a_i + a_\infty - n)\infty = (\deg D - n)\infty$. Таким образом, если $n \leq \deg D$, то $(Pf_D) + D \geq 0$, т.е. $Pf_D \in L(D)$.

Наоборот, пусть $h \in L(D)$ — некоторая ненулевая функция. Рассмотрим функцию $P(z) = h(z)/f_D(z)$. Тогда $(P) = (h) - (f_D) \geq -D - (f_D) = (-\sum a_i - a_\infty)\infty = -\deg D\infty$. Это означает, что у функции $P(z)$ нет полюсов в конечной области, а в бесконечности у нее может быть полюс порядка не выше $\deg D$. Это означает, что $P(z)$ — многочлен степени не выше $\deg D$. □

В случае тривиального расслоения проективное пространство, соответствующее заданному дивизору, допускает следующую реализацию. Рассмотрим все эффективные дивизоры, которые линейно эквивалентны дивизору D. Обозначим это множество дивизоров через $|D|$. Оно заведомо пусто, если степень дивизора D отрицательна. Множество $|D|$ естественно отождествляется с проективизацией векторного пространства $L(D)$. Действительно,

$$|D| = \{(f) + D | f \in L(D) \setminus \{0\}\},$$

причем

$$(f) + D = (g) + D \Leftrightarrow g = \lambda f,$$

где λ — ненулевое комплексное число. Размерность проективного пространства $|D|$ равна $l(D) - 1$.

Определение 7.6.2. *Линейная система* (или *линейный ряд*) на комплексной кривой C это проективное подпространство в $|D|$. Линейная система, совпадающая с $|D|$, называется *полной.*

Пример 7.6.3. На кривой в проективном пространстве дивизоры гиперплоских сечений образуют линейную систему.

Пример 7.6.4. Частным случаем предыдущей конструкции является мероморфная функция на кривой (т.е. отображение кривой в проективную прямую). Прообраз любой точки при таком отображении является эффективным дивизором, и все такие дивизоры линейно эквивалентны. Они образуют линейную систему дивизоров на кривой.

Пример 7.6.5. Канонические дивизоры образуют полную линейную систему.

Все дивизоры, принадлежащие одной линейной системе, имеют одинаковую степень. Это общее значение степени называется *степенью линейной системы.* Линейная система степени d с размерностью проективного пространства n является *линейной системой* g_d^n.

Пример 7.6.6. Всякая мероморфная функция степени d на кривой определяет линейную систему g_d^1 на ней. В частности, кривая гиперэллиптическая тогда и только тогда, когда на ней существует линейная система g_2^1.