10.1. Докажите существование следующих разложений Тейлора при $x \to 0$.

1) $a^x = 1 + \dfrac{\ln a}{1!}x + \cdots + \dfrac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n)$; $\quad e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

2) $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

3) $\operatorname{sh} x = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$;

4) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

5) $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$;

6) $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$;

7) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.

10.2. Напишите разложения Тейлора (до n-го члена) при $x \to 0$ для следующих функций:
1)$^{\text{O}}$ $\operatorname{arctg} x$; **2)**$^{\text{O}}$ $\arcsin x$; **3)**$^{\text{O}}$ $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$.

10.3. Выпишите первые три члена в разложении Тейлора при $x \to 0$ для следующих функций:
1) $\dfrac{1}{\cos x}$; **2)**$^{\text{O}}$ $e^{\sin x}$; **3)** $\sqrt{\cos x}$.

10.4. Найдите недостающие члены разложения Тейлора функции arctg при $x \to +\infty$:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \quad ??? \quad + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

10.5. Найдите неизвестные A, B, α, β ($\alpha > 0,\ \beta \geqslant \alpha + 1$) в разложении функции $\arcsin$ при $x \to 1-0$:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} + A(1-x)^\alpha + B(1-x)^\beta + o\big((1-x)^\beta\big).$$

10.6. Пусть $D = \frac{d}{dt} : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ — оператор дифференцирования. Определите оператор $e^D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$. Придумайте формулу, позволяющую продолжить этот оператор до линейного оператора в пространстве $C(\mathbb{R})$.

10.7. Вычислите следующие пределы:
1)$^{\text{O}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; **2)**$^{\text{O}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{1/x} - \sqrt{x^6 + x^3}\Big)$; **3)**$^{\text{O}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}$.

10.8. Найдите рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов a_k в разложении

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}x^k + o(x^n) \qquad (x \to 0).$$

(*Указание*: $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$.) Докажите, что все a_k — целые неотрицательные числа.

10.9. Докажите, что формула Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа справедлива и без предположения о непрерывности функции $f^{(n)}$.

10.10. 1) Пусть $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Найдите все производные функции f в нуле.

2) Для произвольного $a > 0$ постройте функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, не равную нулю тождественно и такую, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > a$.
3) Для произвольного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ постройте такую функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $f(x) = 1$ на отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $f(x) = 0$ вне отрезка $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

10.11*. 1) Докажите, что при $n \to \infty$ справедлива формула

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + C + o(1)$$

для некоторой константы C. (*Указание*: перенесите все, кроме $C + o(1)$, в левую часть, обозначьте получившуюся величину a_n и установите сходимость ряда $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$.)
2) Вычислите константу C из п. 1. (*Указание:* примените формулу Валлиса; см. листок 9.)
3) (*формула Стирлинга*). Докажите, что $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n \to \infty$.

10.12 (*теорема Абеля*)**.** Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum_n a_n x^n$. Предположим, что ряд $\sum_n a_n R^n$ сходится. Докажите, что функция $f(x) = \sum_n a_n x^n$ непрерывна на $(-R, R]$.

10.13. Вычислите суммы **1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; **2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

10.14*. 1) Определим *усредняющий оператор* A на пространстве $C(\mathbb{R})$ формулой

$$(Af)(x) = \int\limits_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

Докажите, что A взаимно однозначно отображает пространство $\mathbb{R}[x]_n$ многочленов степени не выше n на себя.
2) *Многочлены Бернулли* B_n определяются формулой $B_n(x) = A^{-1}(x^n)$. Докажите, что в некоторой окрестности нуля имеет место разложение

$$\frac{t}{e^t - 1}e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

3) Пусть $D = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования из задачи 10.6. Придайте смысл формуле $B_n(x) = \dfrac{D}{e^D - 1}x^n$ и докажите ее.