Листок 7

Инвариантные распределения. Эргодическая теорема. Классификация состояний. I

Срок сдачи — 3 февраля. 8 задач на 10 баллов.

1) Есть ли сходимость к инвариантному распределению для следующих марковских цепей?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

2) Доказать, что для цепи с двумя состояниями имеется следущая альтернатива: 1) цепь эргодична, 2) состояния не сообщаются, 3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3) N блох случайным образом распределены на двух собаках. Каждую секунду случайным образом выбирается одна блоха из N возможных. Эта блоха перепрыгивает на другую собаку. Пусть X_n — число блох на первой собаке в n-ую секунду. Доказать, что $\{X_n\}$ — марковская цепь и найти ее инвариантное распределение.
4) Докажите, что конечная стохастическая матрица имеет неотрицательный (покомпонентно), ненулевой левый собственный вектор с собственным значением 1.
5) Рассмотрим случайное блуждание $\{X_n\}$ на $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Для $0 < p < 1$ положим: $p_{00} = 1 - p, p_{0,1} = p, p_{n,n+1} = p, p_{n,n-1} = 1 - p$. При каких p существует инвариантное вероятностное распределение?
6) Игральная кость последовательно перекладывается с одной грани равновероятно на любую из четырех соседних независимо от предыдущего. К какому пределу стремится при $t \to \infty$ вероятность того, что при t-м перекладывании кость окажется на грани 6, если сначала она находилась в этом же положении?
7) Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = 1/2$, $z_0 = 0, z_k = z_{k-1} + z_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Положим $\tau_N = \min\{n \geq 1 : |z_n| = N\}$. Найти $M\tau_1, M\tau_2, M\tau_3$.
8) Рассматривается однородная цепь Маркова X_n, состояния которой занумерованы от 1 до 3. Переходная матрица цепи равна

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Найти стационарное распределение этой цепи. Пусть $n \to \infty$. К чему стремится доля посещений состояния 3, если цепь исходит из состояния 1? А если из состояния 2?

9) Рассматривается однородная цепь Маркова X_n с четырьмя состояниями и переходной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

При $n \to \infty$ случайная величина

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I_{\{X_k \leq 2\}}$$

сходится почти наверное к некоторой константе. Найти эту константу.

На множестве **классов сообщающихся состояний** можно определить отношение **частичного порядка:** класс состояний B следует за классом состояний $A, A \to B$, если хотя бы одно состояние $j \in B$ следует за каким-либо состоянием $i \in A$.

10) Доказать, что $A \to B$, $B \to A \Rightarrow A = B$.
11) Если i и j два сообщающихся состояния, то:
    1) Они оба либо рекуррентны, либо транзитивны.
    2) Они оба имеют один и тот же период.

Таким образом, можно говорить о **классах рекуррентных или транзитивных состояний** и о **периоде класса**.

Неприводимость и апериодичность цепей Маркова.

Определение. Будем говорить, что состояние j **однородной цепи Маркова следует за состоянием** i **этой цепи** (и будем обозначать это $i \to j$), если существует $n \geq 0$ такое, что $(P^n)_{ij} > 0$, то есть существует такое n, что $P(X_n = j | X_0 = i) > 0$. Если $i \to j$ и $j \to i$, то состояния i и j называются сообщающимися: $i \sim j$. По определению полагают, что **каждое состояние сообщается с самим собой** (можно положить $n = 0$ и $P(X_0 = i | X_0 = i) = 1 > 0$).

Дальнейшая классификация состояний состоит в следующем. Приведём необходимые определения. Состояние $i \in E$ называется:

- ◦) Поглощающим, если $p_{ii}(1) = 1$,
- ◦) Периодическим с периодом $d > 1$, если НОД $\{t : p_{ii}(t) > 0\} = d$,
- ◦) Непериодическим, если НОД $\{t : p_{ii}(t) > 0\} = 1$,
- ◦) Несущественным (транзитивным), если $\exists j \in E : i \to j, j \not\to i$ (иначе говоря, из этого состояния можно «уйти и не вернуться»)
- ◦) Существенным (рекуррентным), если $\forall j \in E : i \to j \Rightarrow j \to i$,
- ◦) Возвратным, если $P(\exists t < \infty : X_t = i | X_0 = i) = 1$,
- ◦) Возвратным нулевым, если при этом $p_{ii}(t) \to 0$, $t \to \infty$,
- ◦) Возвратным положительным, если $\overline{\lim}_{t \to \infty} p_{ii}(t) > 0$. (в англоязычной литературе употребляют термины **null recurrent** и **positive recurrent**)

Соотношение является отношением эквивалентности на множестве состояний, поэтому можно говорить **о классах эквивалентных состояний.**

Замечания. Сделаем несколько замечаний по поводу введённых определений. Каждое поглощающее состояние является существенным (рекуррентным) и представляет собой отдельный класс, состоящий из одного элемента. Каждое состояние $i \in E$, для которого $p_{ii}(1) > 0$, является апериодическим (непериодическим). Множество возвратных состояний (нулевых или положительных) совпадает с множеством существенных (рекуррентных) состояний.