9.1 (*Метод трапеций*). Пусть $f \in C^2[a,b]$ (т.е. f — дважды дифференцируемая функция на $[a,b]$, вторая производная которой непрерывна). Для каждого n разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, и рассмотрим кусочно-линейную функцию h_n, график которой над каждым отрезком разбиения $[t_k, t_{k+1}]$ представляет собой отрезок с концами $(t_k, f(t_k))$ и $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$. Докажите, что

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b h_n(t)\,dt\Big| < M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M_2 = \max_{t\in[a,b]}|f''(t)|$.

Определение 9.1. Функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого отрезка.

Определение 9.2. Функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *кусочно непрерывной*, если на любом отрезке она имеет лишь конечное число разрывов первого рода.

Определение 9.3. Пусть $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — кусочно непрерывные функции, причем одна из них финитна. *Свёрткой* f и g называется функция

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

9.2 (*Свойства свёртки*). **1)** Докажите, что $f*g$ непрерывна для любых кусочно непрерывных f, g.
2) Докажите, что $f*g = g*f$.
3) Пусть $g\in C^n(\mathbb{R})$. Докажите, что $f*g\in C^n(\mathbb{R})$ и $f*g^{(k)} = (f*g)^{(k)}$ $(k=1,\dots,n)$.

9.3 (*Сглаживание пеньков*). **1)** Для произвольного $\varepsilon>0$ постройте такую функцию $\varphi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\varphi_\varepsilon\geqslant 0$, $\varphi_\epsilon = 0$ вне отрезка $[-\varepsilon,\varepsilon]$, и $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(t)dt = 1$.

В следующих пунктах f — кусочно непрерывная функция.
2) Докажите, что $(f*\varphi_\varepsilon)(x)\to f(x)$ при $\varepsilon\to 0$, если f непрерывна в x.
3) Докажите, что сходимость из п. 5 является равномерной на любом отрезке, в окрестности которого f непрерывна.
4) Пусть все φ_ε чётны (покажите, что этого можно добиться). Куда стремится $(f*\varphi_\varepsilon)(x)$ при $\varepsilon\to 0$ в точках разрыва f?

9.4. Исследуйте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ на сходимость и на равномерную сходимость на отрезках $[0,1-\delta]$ и $[0,1]$.

9.5. **1)**$^{\mathrm{O}}$ Пусть (f_n) — последовательность функций на полуинтервале $[a,b)$, равномерно сходящаяся на (a,b) к функции f. Предположим, что все f_n непрерывны в a. Докажите, что функция f может быть доопределена в a таким образом, что она будет непрерывной в a, и последовательность (f_n) будет равномерно сходиться к f на $[a,b)$.
2)$^{\mathrm{O}}$ Пусть (s_n) — последовательность функций на полуинтервале $[a,b)$, непрерывных в точке a. Докажите, что если функциональный ряд $\sum_n s_n(x)$ сходится равномерно на (a,b), то он сходится равномерно и на $[a,b)$.

9.6. Исследуйте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, где $\alpha\in\mathbb{R}$, на сходимость и на равномерную сходимость на множествах **1)**$^{\mathrm{O}}$ $[0,+\infty)$, **2)**$^{\mathrm{O}}$ $[\delta,+\infty)$, **3)**$^{\mathrm{O}}$ $(0,+\infty)$.

9.7. Исследуйте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^2x^2} \operatorname{tg} \sqrt{\dfrac{x}{n}}$ на сходимость и на равномерную сходимость на множествах **1)** $[0, 1/2]$; **2)** $[1/2, 1]$.

9.8. Найдите множество тех $x \in \mathbb{R}$, в которых определена и непрерывна функция **1)**$^{\mathrm{O}}$ $\sum\limits_n x^2 e^{-nx}$; **2)**$^{\mathrm{O}}$ $\sum\limits_n x e^{-nx}$.

9.9 (*Признак Абеля–Дирихле*)**.** Пусть (a_n) и (b_n) — функциональные последовательности на множестве X. Предположим, что выполнено любое из следующих двух условий:

1) последовательность $(a_n(x))$ монотонна для всех $x \in X$ и равномерно стремится к нулю, и частичные суммы ряда $\sum_n b_n$ равномерно ограничены;
2) последовательность $(a_n(x))$ монотонна для всех $x \in X$ и равномерно ограничена, и ряд $\sum_n b_n$ равномерно сходится.

Докажите, что ряд $\sum_n a_n b_n$ равномерно сходится.

9.10. Исследуйте на сходимость и на равномерную сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^p}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$ (где $p \in \mathbb{R}$) на всевозможных подмножествах $\mathbb{R}$.

Определение 9.4. *Бесконечным произведением* называется формальное выражение $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$, где $a_i \in \mathbb{R}$. Бесконечное произведение $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *сходящимся*, если существует предел $p = \lim\limits_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В этом случае пишут $p = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$.

9.11. 1) Пусть $a_n > 0$ для всех n. Докажите, что сходимость бесконечного произведения $\prod_n a_n$ равносильна сходимости ряда $\sum_n \ln a_n$.
2) Пусть $a_n > 0$ для всех n. Докажите, что сходимость бесконечного произведения $\prod_n (1 + a_n)$ равносильна сходимости ряда $\sum_n a_n$.

9.12. Докажите, что при $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

9.13. 1) Положим $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$. Докажите рекуррентную формулу $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
2) Вычислите I_{2n} и I_{2n-1} для всех $n \in \mathbb{N}$.
3) Докажите *формулу Валлиса*:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right) \cdots$$