

Задачи по группам и алгебрам Ли – 0. Многообразия и группы.

Задачи этого листка (они несложные) можно сдавать *сегодня*, 20 января. Оценка за этот листок учитывается как бонус к итоговой оценке.

- 1. а)** Укажите какую-нибудь пару некоммутирующих гладких векторных полей на вещественной прямой и найдите их коммутатор. **б)** Найдите производную Ли 1-формы dx вдоль каждого из этих полей.
- 2.** Укажите какую-нибудь замкнутую, но не точную гладкую 1-форму на 2-мерном торе.
- 3. а)** Существует ли гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 , касающаяся в каждой своей точке векторных полей $\frac{\partial}{\partial x}$ и $x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$? **б)** Тот же вопрос для полей $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ и $z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$.
- 4.** Опишите все голоморфные вложения \mathbb{C} в $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$.
- 5.** Опишите все нормальные подгруппы в группе движений плоскости \mathbb{R}^2 .
- 6.** Приведите пример некоммутативной группы порядка 27.
- 7.** Докажите, что два коммутирующих линейных оператора в комплексном векторном пространстве имеют общий ненулевой собственный вектор.
- 8. а)** Можно ли алгебру комплексных $n \times n$ -матриц породить двумя матрицами? **б)** одной матрицей?
- 9.** Разложите в прямую сумму неприводимых тензорный куб двумерного неприводимого комплексного представления группы S_3 .
- 10. а)** Приведите пример приводимого, но неразложимого конечномерного комплексного представления какой-нибудь группы (не обязательно конечной). **б)** Может ли при этом группа сохранять невырожденную симметрическую билинейную форму на пространстве представления? **в)** А положительно определенную эрмитову форму?