Листок 7

Расслоения.

Докажите, что:

1. Накрытие связного топологического пространства B является расслоением (с какой структурной группой?).

2. Бесконечная лента Мебиуса является $(\mathbb{Z}_2, \mathbb{R})$ – расслоением над окружностью, если рассматривать нетривиальное действие $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{R}$ $(x \to -x)$. (предъявите явно какой-нибудь атлас расслоения).

Тор отображения.

3. Пусть M – гладкое многообразие, $\varphi : M \to M$ – диффеоморфизм. Рассмотрим многообразие $M(\varphi)$, полученное из цилиндра $M \times [0, 1]$ отождествлением двух его концов с помощью φ $((m, 0) \sim (\varphi(m), 1)$. $M(\varphi)$ является расслоением над окружностью со слоем M.

4. Бутылка Клейна является расслоением над окружностью S^1 со слоем окружность.

5. Отображение Хопфа $S^3 \to S^2$ является расслоением над сферой S^2 со слоем окружность.

6. $\mathbb{R}P^3$ – расслоение над S^2 со слоем окружность.

7. Фунции перехода $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношениям:

   а) $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$

   б) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$

   в) $g_{\alpha\alpha} \equiv 1$

Векторные расслоения.

Докажите, что:

8. Касательное расслоение к сфере S^n тривиализуется на любой открытой полусфере (как выглядит функция перехода?).

9. Касательное (кокасательное) расслоение TM гладкого многообразия M тривиализуется на любой локальной карте многообразия (как выглядят соответствующие функции перехода?).

10. Касательное расслоение к окружности допускает ненулевое сечение (поэтому оно тривиально)

11. Касательное расслоение к трехмерной сфере S^3 допускает три сечения, которые образуют базис в касательном пространстве над каждой точкой (поэтому расслоение TS^3 - тривиально).

12. Расслоение TS^2 нетривиально.

13. Рассмотрим каноническое векторное расслоение над вещественным проективным пространством P^n : слой над каждой точкой $x \in P^n$ – это одномерное пространство (прямая через 0) l_x в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая эту точку определяет. Доказать, что каноническое расслоение нетривиально при $n \geq 1$.