

## Задачи по группам и алгебрам Ли – 1

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. Докажите, что следующие группы являются группами Ли, и найдите их размерности:  
а) подгруппа в  $GL_n(\mathbb{R})$ , состоящая из всех линейных преобразований, сохраняющих данный вектор; б) подгруппа в  $GL_n(\mathbb{R})$ , состоящая из всех линейных преобразований, сохраняющих данное подпространство размерности  $k$ .
2. Докажите, что следующие группы являются группами Ли, и найдите их размерности:  
а) группа  $O_{k,l}(\mathbb{R})$ , состоящая из линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^{k+l}$ , сохраняющих скалярное произведение сигнатуры  $(k, l)$ ; б) группа  $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ , состоящая из линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму; в) группа, состоящая из линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$ , сохраняющих вырожденное неотрицательно определенное скалярное произведение ранга  $k$ .
3. Какие из следующих групп являются комплексными подгруппами Ли в  $GL_n(\mathbb{C})$ :  
а)  $U_n$ ; б)  $SL_n(\mathbb{C})$ ; в)  $O_n(\mathbb{C})$ ?
4. Какие из групп Ли, перечисленных в задаче 3, компактны?
5. Какие из групп Ли, перечисленных в задаче 3, связны?
6. Для каких из следующих групп Ли присоединенное представление неприводимо:  
а)  $SO_3(\mathbb{R})$ ; б)  $U_2$ ; в) группа из задачи 1а?
7. Для каких групп Ли из предыдущей задачи присоединенное представление точно?
8. Постройте расслоение  $SO_n(\mathbb{R})$  над сферой  $S^{n-1}$  со слоем  $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ .
9. Пользуясь гомотопической точной последовательностью расслоения из предыдущей задачи, найдите фундаментальную группу группы Ли  $SO_n(\mathbb{R})$ .
10. Найдите фундаментальную группу группы Ли  $SL_n(\mathbb{C})$ .
- 11\*. Докажите, что на верхней полуплоскости  $\mathcal{H}$  нет структуры комплексной группы Ли.
- 12\*. Докажите, что группа Ли  $SO_3(\mathbb{R})$  проста (как абстрактная группа).
- 13\*. Докажите, что  $PGL_n(\mathbb{C})$  является комплексной линейной группой Ли, т.е. комплексной подгруппой Ли в  $GL_N(\mathbb{C})$  для некоторого  $N$ .
- 14\*. Найдите группу компонент  $G/G_0$  для  $G = O_{k,l}(\mathbb{R})$  в зависимости от  $k, l \in \mathbb{N}$ .
- 15\*. Докажите, что многообразие  $SL_n(\mathbb{R})$  гомотопически эквивалентно  $SO_n(\mathbb{R})$ .