Математические основы естествознания

Листок 7. Кривизна.

Обязательные задачи: 1а, 1б, 2а, 2б

1. В пространствах малой размерности тензор кривизны Римана (далее просто тензор Римана) сводится к более простым объектам.

   а) Что такое тензор Римана в 1-мерном пространстве?

   б) Сколько независимых компонент имеет тензор Римана в 2-мерном пространстве? Выразить тензор Римана в 2-мерном пространстве через метрику и скалярную кривизну (скаляр Риччи).

   в)* Сколько независимых компонент имеет тензор Римана в 3-мерном пространстве? Выразить тензор Римана в 3-мерном пространстве через метрику и тензор Риччи.

   г)* Сколько независимых компонент имеет тензор Римана в D-мерном пространстве при $D \geq 4$?

2. Вычислить компоненты тензора Римана, тензора Риччи и скалярную кривизну для

   а) 2-мерной сферы радиуса r в сферических координатах,

   $$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

   б) 2-мерного пространства-времени с метрикой $ds^2 = dt^2 - t^2 dx^2$. Найти явное преобразование координат к плоскому пространству-времени.

   в) 2-мерного конформно-плоского пространства с метрикой $g_{\mu\nu}(x) = e^{2u(x)}\delta_{\mu\nu}$, где $u(x)$ – произвольная функция координат. Рассмотреть примеры:

   $$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{(1-|x|^2)^2}\,, \qquad ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{(1+|x|^2)^2}$$

   где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$, и обсудить их геометрический смысл.

   г)* D-мерного конформно-плоского пространства с метрикой $g_{\mu\nu}(x) = e^{2u(x)}\delta_{\mu\nu}$

3. Доказать формулу $\nabla^\alpha R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_\beta R$ для ковариантной дивергенции тензора Риччи. (*Подсказка:* использовать тождество Бианки.)

4. Рассмотрим тензор $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ (он называется тензором Эйнштейна). Доказать, что а) $\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$, б) в 2-мерном пространстве тензор Эйнштейна тождественно равен 0.