Листок 7. Момент импульса, сложение моментов и спин.

1. Квантовомеханическая система с моментом импульса l находится в состоянии ψ_{lm}:

$$L^2\psi_{lm} = l(l+1)\psi_{lm}, \qquad L_3\psi_{lm} = m\,\psi_{lm}.$$

   (a) Докажите соотношения на средние значения следующих операторов в состоянии ψ_{lm}

$$\langle L_1\rangle_{\psi_{lm}} = \langle L_2\rangle_{\psi_{lm}} = 0, \qquad \langle L_1^2\rangle_{\psi_{lm}} = \langle L_2^2\rangle_{\psi_{lm}}, \qquad \langle L_1L_2 + L_2L_1\rangle_{\psi_{lm}} = 0.$$

   (b) Докажите, что

$$\langle L_1^2\rangle_{\psi_{lm}} = \frac{l(l+1)-m^2}{2}.$$

   (c) Для частного случая $l = 1$ найдите $\langle L_1^n\rangle_{\psi_{1m}}$, где n — произвольное натуральное число.

2. Используя матрицы Паули построить проекционные операторы $P_{\mathbf{n}}^{\pm}$ на чистые состояния, отвечающие значению проекции спина $\pm 1/2$ на направление единичного вектора $\mathbf{n} = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$. Найти соответствующие вектора состояния, подействовав проекторами на вектор $\psi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

3. Система двух спинов $s = 1/2$ находится в состоянии, описываемом вектором $\Psi = \chi_1 \otimes \chi_2$, где χ_1 и χ_2 — два произвольных, нормированных на единицу вектора пространства $V_{1/2} = \mathbb{C}^2$. Определите:

   (a) Среднее значение квадрата суммарного спина $\langle S^2\rangle_\Psi$;

   (b) Вероятности различных значений квадрата суммарного спина S в состоянии Ψ.

   Рассмотрите, также, частный случай $\chi_1 = \chi_2$.

4. Квантовомеханическая система состоит из двух подсистем, характеризуемых значениями момента импульса l_1 (пространство состояний V_{l_1}) и l_2 (пространство состояний V_{l_2}). Обозначим $\psi_{l_1m_1}$ и $\psi_{l_2m_2}$ базисные наборы в V_{l_1} и V_{l_2} соответственно, состоящие из собственных векторов квадрата момента импульса и его третьей компоненты для каждой из подсистем.

   (a) Пусть состояние системы задается вектором $\Psi = \psi_{l_1m_1} \otimes \psi_{l_2m_2}$ (с фиксированными m_1 и m_2) из пространства состояний $V_{l_1} \otimes V_{l_2}$. Найдите в этом состоянии среднее значение вектора полного момента импульса $\langle L_i\rangle_\Psi$, $i = 1, 2, 3$, и среднее значение его квадрата $\langle L^2\rangle_\Psi$.

   (b) Для случая $m_1 = l_1$, $m_2 = l_2 - 1$ (то есть, $\Psi = \psi_{l_1l_1} \otimes \psi_{l_2l_2-1}$) найдите вероятности различных возможных значений квадрата полного момента импульса L^2 в состоянии Ψ.

5. Для системы, состоящей из двух подсистем с одинаковым моментом импульса $l_1 = l_2 = l$ построить нормированный на единицу вектор состояния $\psi_{00}^{(ll)}$, отвечающий значению полного момента $L = 0$ (выразить $\psi_{00}^{(ll)}$ в виде явной линейной комбинации базисных векторов $\psi_{lm_1} \otimes \psi_{lm_2}$).

   Указание. Воспользуйтесь свойством $L_\pm\psi_{00}^{(ll)} = 0$.

6. Выпишите явно базисные векторы полного момента импульса и его третьей компоненты для сложения моментов импульса l_1 и l_2 в случае:

   (a) $l_1 = 1$, $l_2 = 1/2$.

   (b) $l_1 = 1$, $l_2 = 1$.

   Выпишите таблицу коэффициентов Клебша-Гордана для этих случаев.

7. Частица спина $s = 1/2$ находится в магнитном поле, направленном вдоль оси Oz декартовой системы координат, которое осциллирует по времени согласно закону:

$$\bar{\mathcal{H}}(t) = (0, 0, \mathcal{H}_0 \cos \omega t).$$

   Гамильтониан взаимодействия магнитного момента частицы с полем дается выражением

$$H = -\mu(\bar{\mathcal{H}} \cdot \bar{s}),$$

   где μ — положительная константа, а $(\bar{\mathcal{H}} \cdot \bar{s})$ — скалярное произведение вектора магнитного поля и векторного оператора спина частицы.

   В начальный момент спин частицы направлен вдоль единичного вектора **n** (то есть, проекция третьей компоненты спина на направление вектора **n** имеет значение 1/2). Определите эволюцию направления спина во времени.