11.1. Докажите, что следующие множества открыты в $\mathbb{R}^n$:
1)$^{\circ}$ $\{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 > 0\}$;
2)$^{\circ}$ $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) > r\}$;
3)$^{\circ}$ $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$, где $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция;
4)$^{\circ}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.

11.2. Докажите, что следующие множества замкнуты в $\mathbb{R}^n$:
1)$^{\circ}$ $\{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \geqslant 0\}$;
2)$^{\circ}$ $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \geqslant r\}$;
3)$^{\circ}$ $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant 0\}$, где $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция;
4)$^{\circ}$ $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}$, где I — любое подмножество в $C(\mathbb{R}^n)$;
5)$^{\circ}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant f(x)\}$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.

11.3. Компактны ли следующие множества: **1)**$^{\circ}$ окружность на плоскости; **2)**$^{\circ}$ сфера в $\mathbb{R}^n$; **3)**$^{\circ}$ граница куба в $\mathbb{R}^n$; **4)**$^{\circ}$ прямая в $\mathbb{R}^n$?

11.4. Докажите, что любое открытое подмножество $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем счетной совокупности попарно непересекающихся интервалов.

11.5. Докажите, что любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ является пересечением последовательности открытых множеств, а любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ — объединением последовательности замкнутых множеств.

Определение 11.1. Пусть E – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\|\cdot\|\colon E \to [0, +\infty)$ называется *нормой* на E, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in E$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in E$;
3) $\|x\| = 0$ только при $x = 0$.

Если $\|\cdot\|$ — норма на E, то на E можно определить расстояние (метрику) $d(x, y) = \|x - y\|$, которое, в свою очередь, порождает топологию на E по той же схеме, что и евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ (см. лекцию).

11.6. Наряду с евклидовой нормой на $\mathbb{R}^n$, которая определяется формулой $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$ для $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, введем еще две нормы равенствами $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ и $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Докажите, что $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 11.2. Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — две нормы на векторном пространстве E. Они называются *эквивалентными*, если существуют такие $a, b > 0$, что $a\|x\|' \leqslant \|x\|'' \leqslant b\|x\|'$ для всех $x \in E$.

Из предыдущей задачи следует, что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

11.7. Докажите, что нормы на векторном пространстве эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают одну и ту же топологию.

11.8. Пусть (x_k) – последовательность точек $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$;
2) $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$;
3) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x^i$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
4) для любого открытого множества $U \ni x$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_k \in U$ для всех $k > N$.

11.9. 1)$^{\circ}$ Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Докажите, что $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ для некоторой последовательности (x_k) из A.
2) Докажите, что множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто тогда и только тогда, когда для любой последовательности (x_k), сходящейся к x, найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_k \in U$ для всех $k > N$.

11.10. Докажите, что из любого открытого покрытия любого множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ можно выбрать не более чем счетное подпокрытие.

11.11. Постройте такую функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что $f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} f(t,kt) = \lim\limits_{t\to 0} f(kt,t) = 0$ для любого $k \in \mathbb{R}$, но f разрывна в точке $(0,0)$.

11.12. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное инъективное отображение. Докажите, что отображение $f^{-1}\colon f(K) \to K$ непрерывно.

11.13. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

Указание. Докажите, что произвольная норма на $\mathbb{R}^n$, рассмотренная как функция на сфере $S = \{x : \sum (x^i)^2 = 1\}$, достигает на ней максимума и минимума.

Определение 11.3. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in A$ найдется такое непрерывное отображение (путь) $\gamma\colon [0,1] \to A$, что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Подмножество $U \subseteq A$ называется *относительно открытым* (или *открытым в* A), если $U = A \cap V$ для некоторого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$. Множество A называется *связным*, если оно не представимо в виде объединения двух своих непустых относительно открытых подмножеств.

11.14. Докажите, что отрезок $[a,b]$ связен и линейно связен.

11.15. Докажите, что непрерывный образ связного (соответственно, линейно связного) подмножества $\mathbb{R}^n$ связен (соответственно, линейно связен).

11.16. Докажите, что линейно связное множество связно.

11.17. Являются ли следующие множества связными?
1)$^{\circ}$ окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$; **2)**$^{\circ}$ $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$; **3)** сфера $S^2 \subset \mathbb{R}^3$; **4)** $\mathbb{R}^3 \setminus S^2$; **5)** $\{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geqslant 0\}$; **6)** $\{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \neq 0\}$.

11.18. Пусть Γ есть график функции $y = \sin(1/x)$, где $0 < x \leqslant 1$. Рассмотрим множество, равное объединению Γ с отрезком $[-1,1]$ оси Oy. Докажите, что это множество связно, но не линейно связно.

11.19. Опишите все связные подмножества $\mathbb{R}$.

11.20. Докажите что для открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$ связность эквивалентна линейной связности.