

Фильтрации

1. Пусть $\{0\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n$ – фильтрация абелевых групп, и присоединенная градуированная группа $(G_1/G_0) \oplus (G_2/G_1) \oplus \dots \oplus (G_n/G_{n-1})$ свободна. Верно ли, что G_n свободна?
2. Фильтрованный комплекс – диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \subset & C_{i+1}^j & \subset & C_{i+1}^{j+1} & \subset & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \subset & C_i^j & \subset & C_i^{j+1} & \subset & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

где по вертикали идут комплексы, а по горизонтали – фильтрации. Классифицируйте конечномерные конечные фильтрованные комплексы вещественных векторных пространств, у которых все компоненты присоединенного градуированного комплекса (то есть факторы C^j/C^{j-1}) одномерны. Отклассифицировать – значит описать явно некоторый запас фильтрованных комплексов, таких что любой из классифицируемых комплексов изоморфен ровно одному из этого запаса.

Спектральные последовательности

3. а) Рассмотрим слой F над точкой $x \in B$ расслоения $E \rightarrow B$. Опишите спектральную последовательность расслоения $F \rightarrow \{x\}$ и ее отображение в спектральную последовательность расслоения $E \rightarrow B$, индуцированное вложением $F \rightarrow \{x\}$ в $E \rightarrow B$.
 б) Отображение $E \rightarrow B$ можно рассматривать как отображение i расслоения $E \rightarrow B$ в тривиальное расслоение $B \rightarrow B$. Опишите спектральную последовательность тривиального расслоения $B \rightarrow B$ и отображение в нее спектральной последовательности $E \rightarrow B$, индуцированное отображением i .
4. а) Дайте определение послойной надстройки над расслоением. Рассмотрим два расслоения над S^2 со слоем S^2 : тривиальное и послойную надстройку над расслоением Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$.
 б) Изоморфны ли кольца когомологий у тотальных пространств этих двух расслоений?
 в) Изоморфны ли спектральные последовательности этих двух расслоений (с учетом мультипликативной структуры)?
5. а) Постройте расслоения $SO(n) \rightarrow V(n, 2)$ со слоем $SO(n-2)$ и $V(n, 2) \rightarrow S^{n-1}$ со слоем S^{n-2} .
 б) Опишите когомологии $H^*(SO(m); \mathbb{Q})$ для нечетного m .
 в) Опишите когомологии $H^*(SO(m); \mathbb{Q})$ для всех m .
6. Пусть X – связное компактное ориентируемое n -мерное многообразие, обозначим сферизацию его касательного пространства $(T_x X \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+$ через $S_x X$ и рассмотрим расслоение $SX \rightarrow X$ со слоем S^{n-1} . В его спектральной последовательности дифференциал $H_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ является домножением на некоторое число. На какое?