8 Линейные G-связности в линейных G-векторных расслоениях.

1. Меморандум.

С касательным расслоением мы имели дело всю дорогу. Пора напомнить определение ***гладкого векторного расслоения*** E над гладким связным многообразием M (***база*** расслоения) со ***слоем*** V и ***структурной группой*** G, которая, как правило, будет линейной группой Ли или ее дискретной подгруппой (используется обозначение $V \to E \to M$). Вот удобное для нас координатное определение

Определение 5 *Пусть $p : E \to M$ – гладкое отображение, слой которого $p^{-1}(m) = E_m$ над любой точкой m базы диффеоморфен векторному пространству V размерности d. Более того, p локально тривиально. Это означает, что существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы M (гладкий* ***атлас расслоения****), что «кусок» $E_\alpha = p^{-1}(U_\alpha)$ расслоения над* ***картой атласа*** *U_α выглядит (если постараться) как прямое произведение $U_\alpha \times V$. Точнее,*

а) существует такой диффеоморфизм $\varphi_\alpha : E_\alpha \to U_\alpha \times V$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times V \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd} \qquad \textit{коммутативна.}$$

(здесь pr_1 – естественная проекция прямого произведения на первый сомножитель).

Коммутативность диаграммы фактически означает существование семейства диффеоморфизмов $\varphi_\alpha(m) : E_m \to V$, $m \in U$, отождествляющих слой E_m с векторным пространством V (или, как написано в учебнике Зайцева, задающих структуру векторного пространства в слое E_m).

Диффеоморфизмы φ_α называются диффеоморфизмами тривиализации.

б) на пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ возникают две тривиализации:

$$\begin{tikzcd} & U_{\alpha\beta} \times V \\ E_{\alpha\beta} \arrow[ur, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi_\beta"] & \\ & U_{\alpha\beta} \times V \end{tikzcd}$$

*Если учесть, что тривиализации работают послойно, то возникает гладкое семейство диффеоморфизмов $g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_\alpha(m) \circ \varphi_\beta^{-1}(m) : V \to V$, $m \in U_{\alpha\beta}$. Требуется, чтобы для любого $m \in U_{\alpha\beta}$ диффеоморфизм $g_{\alpha\beta}(m)$ был **линейным преобразованием из структурной группы** G.*

Таким образом, на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ возникают G-значные гладкие функции: $g_{\alpha\beta}(m) : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ (если в пространстве V выбрать базис, то они превращаются в матричнозначные).

Замечание. Как легко проверить, функции $g_{\alpha\beta}(m)$, которые называются ***функциями перехода*** или функциями «склейки», удовлетворяют соотношениям (***условия коцикла***)

1) $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$

2) $g_{\alpha\alpha} = id$ на U_α

В дальнейшем мы будем задавать векторные расслоения их гладкими атласами, подразумевая под этим следующее утверждение, доказательство которого мы пропускаем:

пусть задано открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M картами, а на пересечениях карт $U_\alpha \cap U_\beta$ заданы G-значные функции $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие условиям 1) и 2). Тогда по этим данным однозначно (с точностью до изоморфизма G-расслоений) восстанавливается векторное G-расслоение E, для которого $\{U_\alpha\}$ является атласом. Рецепт склейки «скрученного» объекта из «нескрученных» таков:

в пространстве $\bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times V)$ нужно склеить (отождествить) те и только те пары точек $(m, v) \sim (n, w)$, $m \in U_\alpha$, $n \in U_\beta$, $v, w \in V$, у которых $m = n$, а $w = g_{\beta\alpha} v$ (подробности в любом незамутненном источнике знаний: особенно хорош Дж. Милнор и Дж. Сташеф «Характеристические классы»).

Стоит еще раз подчеркнуть: атлас расслоения – это набор карт вместе с фиксированными тривиализациями. Осталось напомнить, что ***сечением*** расслоения $p : E \to M$ называется такое гладкое отображение $s : M \to E$ базы в расслоение, что $p \cdot s = id$. Из этого условия с помощью теоремы о неявной функции выводится, что $s(M)$ – гладкое подмногообразие в E, диффеоморфное M (иногда это полезно иметь ввиду). Сечения расслоения образуют векторное пространство и модуль над кольцом $C^\infty(M)$ гладких функций на M (сечение можно умножить на функцию). Мы это все уже видели на примере гладких векторных полей на многообразии – они суть сечения касательного расслоения. Векторное пространство сечений расслоения E обозначим через $\Gamma(E)$.

Примеры и вопросы для самоконтроля.

• Тривиальное расслоение: $E = M \times V$

• • Касательное (кокасательное) расслоение TM^n : рассмотрим покрытие M координатными картами U_α, и пусть $\tau_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^d$ – координатное отображение. Функциями перехода касательного расслоения служит матрица Якоби замены координат $\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ на $U_\alpha \cap U_\beta$:

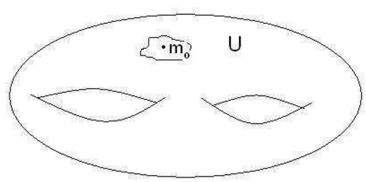
$$g_{\alpha\beta} = Jac(\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1})$$

Если в качестве функций перехода выбрать матричнозначные функции

$$g_{\alpha\beta} = Jac^t(\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1}),$$

то склейка (с их помощью) ***филейных кусков*** $U_\alpha \times \mathbb{R}^d$ дает кокасательное расслоение T^*M, сечениями которого будут дифференциальные 1-формы (этот пример – призыв все это тщательно обдумать).

• • • Расмотрим гладкую замкнутую поверхность M. Например, крендель:



(Хитрый Кит)

рассмотрим покрытие M, состоящее из двух карт:

U_0 – координатная (x, y) окрестность отмеченной точки m_0 с координатами $x = 0$, $y = 0$;

$U_1 = M \setminus m_0$;

На пересечении рассмотрим функцию $g_{0,1} : U_0 \cap U_1 = U_0^\circ \to \mathbb{R}^* = GL(1, \mathbb{R})$, $g_{0,1} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вопрос. Тривиально ли одномерное вещественное расслоение, полученное склейкой филейных кусков: $U_i \times \mathbb{R}$ $(i = 1, 0)$ с помощью функции g_{01}?

• • •• Рассмотрим тот же крендель как одномерное комплексное многообразие. Выберем в U_0 локальную координату z (z-координата точки m_0 равна 0). Склеим теперь голоморфное одномерное комплексное расслоение из филейных кусков $U_i \times \mathbb{C}$, $i = 0, 1$, с помощью голоморфной матричнозначной функции $g_{01} : U_0 \cap U_1 \to GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, $g_{01} = z$.

Вопрос. Тривиально ли полученное голоморфное линейное расслоение на крендене?

И последнее. Посмотрим, что произойдет с функциями склейки, если изменить тривиализации на атласе расслоения. Изменить тривиализацию означает для векторного G-расслоения обзавестись G-значными функциями $\gamma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$ на каждой карте U_α и рассмотреть тривиализацию $\varphi'_\alpha : E_\alpha \longrightarrow^{\gamma_\alpha \circ \varphi_\alpha} U_\alpha \times V$, полученную из прежней тривиализации φ_α послойной подкруткой пространства V_m с помощью элемента $\gamma_\alpha(m)$ из группы G. Тогда на пересечениях возникают новые функции перехода $g'_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha \circ g_{\alpha\beta} \circ \gamma_\beta^{-1}$ (***когомологичные коциклы***). Ясно, что склейки филейных кусков с помощью функций $g'_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ приводят к одному и тому же раслоению (в конце концов, атлас – это система координат, а ее можно выбирать по-разному).

2. Связности в векторных расслоениях. Первое знакомство.

Связность (известная еще как ковариантное дифференцирование, параллельный перенос, калибровочный потенциал, интегрируемое распределение...) модно вводить сначала на главных расслоениях, а затем на векторных, ассоциированных с главными. Но мы начнем прямо с векторных, потеряв высоту, но (может быть) выиграв в ясности. Есть еще одна более глубокая причина: связность в векторных расслоениях лучше приспособлена к аналитической технике.

Связность по Косулю.

• Связность – это структура на векторном расслоении $V \to E \to M$, которая позволяет ***канонически*** отождествлять его слои (идея параллельного переноса). Конечно, локально это позволяет и тривиализация, но такое отождествление каконическим не является. Введем связность как ковариантную производную ∇.

Определение 6 *Ковариантная производная в векторном расслоении $E \to M$ это отображение $\Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, которое каждому векторному полю $X \in \Gamma(TM)$ относит* ***линейный оператор*** *(дифференцирование сечения в направлении X) $\partial_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ на пространстве сечений расслоения E (вспомните про ковариантное дифференцирование векторных полей, где роль E играет касательное расслоение TM) со свойствами:*

1. $\partial_{fX} s = f \partial_X s$, $s \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$.

2. $\partial_{X_1 + X_2} s = \partial_{X_1} s + \partial_{X_2} s$

3. $\partial_X f s = \partial_X f \cdot s + f \partial_X s$, *где* $\partial_X f = df(X)$ *– производная функции f по направлению вектора $X \in TM$.*

Замечание. Подчеркнем, что операторы ∇_X зависят от точки $m \in M$ и вектора X, приложенного в этой точке.

Пример 1 (тривиальная связность в тривиальном расслоении).

Возьмем тривиальное расслоение $E = M \times V$ и рассмотрим в нем постоянные сечения вида $v(m) = (m, v)$, где v – фиксированный вектор из V. Попросим чтобы любой оператор ∇_X был равен нулю на любом постоянном сечении. Нетрудно понять, что это требование однозначно определяет судьбу любого другого сечения. В самом деле, если $e_1, \dots, e_d$ – базис V, то постоянные сечения $e_1(m), \dots, e_d(m)$ (чаще всего мы не будем писать аргумент m, но о нем следует помнить) образуют базис в каждом слое тривиального расслоения, а потому любое сечение записывается в виде $s = \sum_{i=1}^{d} f_i(m) e_i(m)$ и $\nabla_X s = \sum (df_i)(X) e_i$. Таким образом, тривиальная связность однозначно определяется тривиальным действием операторов ∇_X на постоянных сечениях.

• • Другая точка зрения (вокзал едет, поезд стоит).

Перед тем, как начать погружение, полезно взглянуть на связность несколько иначе. Формально значок $\nabla_X s$ зависит от двух переменных: векторного поля X и сечения s. Что происходит, если зафиксировать векторное поле X, мы уже знаем: возникает семейство линейных операторов на слоях, гладко зависящее от точки m (и волшебным образом от поля X). Давайте теперь заморозим сечение и будем трактовать значок ∇ как операцию (назовем ее, скажем, D), которая каждому сечению s расслоения E ставит в соответствие линейный оператор $D(s) : \Gamma(TM) \to \Gamma(E)$ из пространства сечений $\Gamma(TM)$ в пространство сечений расслоения E. Причем для этого оператора свойства 1, 2 принимают вид:

1. $D(s)(fX) = fD(s)X$, $X \in \Gamma(TM)$, $s \in \Gamma(E)$.
2. $D(s)(X_1 + X_2) = D(s)X_1 + D(s)X_2$.

Свойство 1 показывает, что оператор $D(s)$ линеен над функциями, т. е. $D(s)$ – это морфизм $C^\infty(M)$-модулей сечений соответсвующих расслоений. Теперь нужно сослаться на следующее фундаменталное свойство векторных расслоений: если E и F – векторные расслоения над M, то всякий морфизм $C^\infty(M)$-модулей $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ определяет единственное сечение векторного расслоения $\mathrm{Hom}(E, F) \simeq E^* \otimes F$ (здесь E^* – двойственное расслоение, слой которого есть двойственное пространство V^*).

Таким образом, связность можно понимать и как такое явление, когда каждому сечению s расслоения E ставится в соответствие сечение $D(s)$ расслоения $T^*M \otimes E$. Эти сечения можно трактовать как ***дифференциальные формы*** на M со ***значениями*** в ***векторном расслоении*** E (поэтому часто пространство $\Gamma(T^*M \otimes E)$ обозначается $\Omega^1(E)$). Заметим, что свойство 3 перепишется при такой трактовке так:

$$D(fs) = df \otimes s + fDs$$

Замечание. Неформально можно понимать происходящее следующим образом:

операция ∇_X ставит в соответствие сечению s новое сечение $\nabla_X s$. Таким образом, при фиксированном s, у нас возникает послойное линейное отображение $D(s) : T_m M \to E_m : D(s)(X_m) = (\nabla_X s)(m)$. Каждое такое отображение – это элемент пространства $Hom(T_m M, E_m) = T_m^* M \otimes E_m$. Теперь хочется объединить все эти послойные отображения в сечение расслоения $\mathrm{Hom}(TM, E) \simeq T^*M$. Оказывается, что свойство 1 – гарантия того, что это можно сделать. В дальнейшем нам будет удобно менять точку зрения на связность, но пока вернемся к ковариантной производной ∇_X.

3. Символы Кристофелля (увидеть и забыть). Параллельный пернос (помнить и любить).

Перейдем к локальному описанию ковариантного дифференцирования. С этой целью выберем атлас расслоения, для которого U_α будут одновременно и координатными картами (почему это можно сделать?). Таким образом, мы получим над картой U одновременно и тривиализацию касательного расслоения TM в виде n-координатных векторных полей $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$, $i = 1, \ldots, n$, и тривиализацию $E(U) \longrightarrow^{\varphi} U \times \mathbb{R}^d$ в виде d постоянных базисных сечений e_i. Взглянув на свойства 1, 2, 3 ковариантной производной, просто понять, что достаточно знать ответ в случае действия операторов $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$ (суммирование по повторяющимся индексам).

Определение 7 *Функция $\Gamma_{ij}^k(m)$ ($j, k = 1, \ldots, d$, $i = 1, \ldots, n$) на U называется символом Кристоффеля.*

Задание символов Кристоффеля полностью определяет ковариантное дифференцирование в тривиальном расслоении (попробуйте для общего сечения записать это сами). Для наших целей я ограничусь лишь следующими вычислениями. Пусть $s \in \Gamma(E)$. Ограничим s на кривую $\gamma(t)$, лежащую в карте U. Тогда $s(t) = a^k(t) e_k(t)$. Пусть $V(t) = \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^{(i)}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда

$$\nabla_{V(t)} s(t) = \dot{a}^k(t) e_k(t) + \dot{\gamma}^{(i)}(t) a^k(t) \Gamma_{ik}^j(\gamma(t)) e_j(\gamma(t)) \quad (*)$$

(почему?) (заметьте, что ковариантная производная зависит только от ограничения сечения s на кривую γ).

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка $\nabla_{V(t)} s(t) = 0$ относительно функций $\left\{a^k(t)\right\}$, $k = 1, \ldots, d$. Задав произвольное начальное условие $s(0) \in E_{\gamma(0)}$, мы получим единственное решение, которое называется ***параллельным*** переносом вектора $s(0)$ вдоль кривой $\gamma(t)$.

Таким образом, мы научились переносить слой $E_0 = E_{\gamma(0)}$ в слой $E_1 = E_{\gamma(1)}$ с помощью кривой $\gamma(t)$. Результат (см. задачу 8.1) является невырожденным линейным преобразованием слоев. С другой стороны выбор тривиализаци на U снабжает пространства E_0 и E_1 базисами $e_1(0),\ \dots\ , e_d(0)$ и $e_1(1),\ \dots\ , e_d(1)$ соответственно. Запишем оператор параллельного переноса $P_{\gamma,t} : E_0 \to E_1$ в этих базисах.

Определение 8 *Связность ∂ (ковариантное дифференцирование) назыветcя G-связностью в G-расслоении E, если матрица $P_{\gamma,t}$ лежит в линейной группе Ли G, записанной в базисе $e_1(0),\ \dots\ , e_d(0)$.*

Сразу дадим еще одно важное определение:

Определение 9 *Сечение называется* ***горизонтальным****, если $\nabla_X s = D(s)(X) = 0$ для любого $X \in \Gamma(TM)$.*

Пример 2. Касательное расслоение окружности TS^1 тривиально (?). Поэтому на нем есть тривиальная связность ∂, однозначно определяемая условием обнуления постоянных сечений. Согласно задаче 8.3 любая другая связность ∇ отличается от нее на тензор из пространства $\Omega^1(S^1) \otimes \mathbb{R} = \Omega^1(S^1)$, т. е. просто на дифференциальную 1-форму ω на окружности, которую можно записать в виде $\omega = f(\theta)d\theta)$, где $f(\theta)$ – 2π-периодическая функция. Тогда на сечении $s = g(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$ (где $g(\theta)$ – 2π-периодическая функция)

$$\nabla_X s = \partial_X s + \omega(X) \cdot s \text{ или}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}} \left(g(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} \right) = \frac{\partial g}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} + f(\theta) g(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta}$$

(так как $d\theta(\frac{\partial}{\partial\theta}) = 1$).

Таким образом, горизонтальные сечения – суть решения линейного дифференциального уравнения $\frac{\partial g}{\partial\theta} + f \cdot g = 0$.