"Спецфункции". Тезисы 6-ой лекции.

Понятие асимптотического разложения

1.Предисловие. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_0^\infty e^{-xt} \cos t dt$. Определяемая им функция $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \cos t\, dt$, аналитична в области $\mathrm{Re}\, x > 0$ в силу абсолютной сходимости интеграла. При этих условиях интеграл вычисляется повторным интегрированием по частям:

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d(\sin t) = \sin t e^{-xt}|_{t=0}^\infty + x\int_0^\infty \sin t e^{-xt} dt = x\int_0^\infty \sin t e^{-xt} dt =$$
$$-xe^{-xt}\cos t|_{t=0}^\infty - x^2\int_0^\infty e^{-xt}\cos t dt = x - x^2F(x),$$

так что $(1+x^2)F(x) = x$ и $F(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Этого же результата можно добиться, разложив $\cos t$ в ряд Тэйлора:

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\cos t dt = \int_0^\infty e^{-xt}\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - ...\right) dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!x^{2n}}\frac{d(xt)}{x} =$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{x^{2n+1}}\frac{\Gamma(2n+1)}{(2n)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{x^{2n+1}} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+x^{-2}} = \frac{x}{1+x^2},$$

если $|x| > 1$.

Несобственный интеграл $G(x) = \int_0^\infty \dfrac{e^{-xt}}{1+t}dt$ также является аналитической (но уже не элементарной) функцией в области $\mathrm{Re}\, x > 0$. Заменяя под знаком интеграла $(1+t)^{-1}$ на соответствующий ряд Тэйлора, приходим к выражению

$$G(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_0^\infty e^{-xt}t^n dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_0^\infty e^{-xt}\frac{(xt)^n}{x^{n+1}}d(xt) == \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} =$$
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Получили ряд, расходящийся при любом x, отличном от нуля, что говорит о неправомерности приведенных рассуждений. Этого можно было ожидать, поскольку используемое разложение имеет место не на всем промежутке интегрирования. Повторим те же вычисления с конечной частью ряда Тэйлора функции $(1+t)^{-1}$. По формуле суммы геометрической прогресии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\frac{t^n}{1+t},$$

поэтому

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^\infty e^{-tx}t^k dt + (-1)^n\int_0^\infty \frac{t^ne^{-xt}}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}} + (-1)^n\int_0^\infty\frac{t^ne^{-xt}}{1+t}dt$$

Последнее слагаемое

$$R_n(x) = (-1)^n\int_0^\infty\frac{t^ne^{-xt}}{1+t}dt$$

представляет собой ошибку приближения функции $G(x)$ конечным рядом $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$. Нетрудно видеть, что при $\operatorname{Re} x = a > 0$

$$|R_n(x)| < \int_0^\infty t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

В частности, если x - действительное положительное число, что мы и предположим далее для простоты изложения, то $|R_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}}$ и этот остаток имеет знак $(-1)^n$. Изучим поведение ошибки в зависимости от n и x.

а) Фиксируем n. Тогда с ростом x остаток $R_n(x)$ стремится к нулю.

б) Фиксируем x. Ошибка уменьшается с ростом n, пока n не превосходит целой части $[x]$ числа x. Затем ошибка $R_n(x)$ начинает расти. Таким образом, имеем неустранимую ошибку вычислений, равную $\varepsilon(x) = \dfrac{[x]!}{x^{[x]}}$. Она весьма мала при больших x. Например, при $x = 10$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-3}$, а при $x = 100$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-40}$, что говорит о том, что приближения получаются очень хорошими, несмотря на неустранимые ошибки.

Приведенный способ вычислений был аксиоматизирован А.Пуанкаре в 1890 г.

2. Определение. Пусть R- область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{R}$ - предельная точка R. Последовательность функций $\varphi_n(z)$, $n \geq 1$, $z \in R$ называется асимптотической последовательностью при $z \to z_0$ в R, если все $\varphi_n(z)$ определены в R и для всякого $n \geq 1$ $\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$ при $z \to z_0$.

Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ - асимптотическая последовательность. Ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n\varphi_n(z)$ называется асимптотическим разложением функции $f(z)$ при $z \to z_0$ в R, $f(z) \sim \sum_{n\geq 1} a_n\varphi_n(z)$, если для всякого $n \geq 1$ выполнено соотношение $f(z) - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(z) = o(\varphi_n(z))$, $z \to z_0$, $z \in R$.

Наиболее часто используются степенные асимптотические последовательности, например, $\varphi_n(z) = z^n$ при $z_0 = 0$ или $\varphi_n(z) = z^{-n}$ при $z_0 = \infty$. Если функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение по заданной системе функций, то его коэффициенты единственны. В самом деле, из определения имеем при $z \to z_0$, $z \in R$

$$f(z) - a_1\varphi_1(z) = o(\varphi_1(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_1 = \lim_{z\to z_0,\, z\in R} \frac{f(z)}{\varphi_1(z)},$$
$$f(z) - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_n = \lim_{z\to z_0,\, z\in R} \frac{f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\varphi_k(z)}{\varphi_n(z)}$$

Можно также заметить, что при наличии асимптотического разложения выполнена более точная оценка ошибки: $f(z) - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(z) = O(\varphi_{n+1}(z))$ при $z \to z_0$ и $z \in R$, что можно использовать как другой вариант определения.

С другой стороны, функция не определяется своим асимптотическим разложением; различные функции могут иметь одно и тоже асимптотическое разложение. Например, функция $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ имеет нулевое асимптотическое разложение в нуле по степеням z,

$$e^{-\frac{1}{z^2}} \sim 0 + 0 \cdot z + ... + 0 \cot z^n + ... \qquad z \to 0$$

поскольку убывает при $z \to 0$ быстрее любой степени z.

Формула Тэйлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + o(z^{n+1})$$

говорит, что всякая функция, бесконечно дифференциируемая в нуле, имеет свой ряд Тэйлора в качестве асимптотического разложения (вне зависимости от его сходимости). Однако, понятие асимптотического разложения шире формулы Тэйлора: во-первых, можно брать иные асимптотические последовательности, например,

$$\varphi_1(z) = z^{-2}, \varphi_2(z) = z^{-1}, \ldots, \varphi_n(z) = z^{n-3}, ..., \qquad z_0 = 0.$$

Тогда фунции, допускающие асимптотическое разложение по этой системе, могут стремиться к ∞ при $z \to 0$ и тем самым не иметь никаких производных в нуле. Во-вторых, как правило, асимптотические разложения рассматриваются в секторах или полуплоскостях типа $\operatorname{Re} z > 0$ и не контролируют поведение функции вне этих секторов.

3. Пример. Трансцендентное уравнение $x = \operatorname{ctg} x$ имеет бесконечно много корней. При больших x n-ный корень ведет себя как $x = \pi n + ...$. Уточним его поведение. Уравнение для n-го корня эквивалентно соотношению

$$x = \pi n + \operatorname{arcctg} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pi n + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Воспользуемся разложением $\operatorname{arctg} x$ в ряд: $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - ...$, $|x| < 1$, так что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots, \qquad |x| > 1.$$

В частности, $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = o(1)$ при $x \to \infty$. Подставляя это равенство в соотношение (1), получаем:

$$x = \pi n + o(1) \tag{2}$$

Следующая итерация формулы Тэйлора для арктангенса говорит, что $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2})$. Подставляем это разложение в соотношение (1), воспользовавшись уже полученной оценкой (2):

$$x = \pi n + \frac{1}{\pi n + o(1)/(\pi n)} + o(x^{-2}) = \pi n + \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{o(1)}{\pi n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Здесь мы воспользовались следствием оценки (2): бесконечно большие величины x и n эквивалентны при $x \to \infty$ (предел отношения равен 1) и потому $o\left(\frac{1}{x}\right)$ есть и $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Продолжение процедуры дает следующий член асимптотического разложения корня трансцендентного уравнения

$$x = \pi n + \frac{1}{\pi n} - \frac{4}{3\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

4. Асимптотика интеграла Лапласа. Пусть $f(t)$ - функция действительного аргумента $t > 0$ такая, что интеграл

$$F(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt \tag{3}$$

(преобразование Лапласа функции $f(t)$) абсолютно сходится при больших действительных $x > 0$. Для этого достаточно потребовать, например, существования конечного интеграла $\int_0^\infty |f(t)|e^{-x_0 t}dt = M$ для некоторого $x_0 > 0$.

Все асимптотические свойства интеграла Лапласа (3) основаны на следующей оценке:

Лемма. Пусть функция $f(t)$ такова, что

а) интеграл $\int_0^\infty |f(t)|e^{-x_0 t}dt = M$ конечен для некоторого $x_0 > 0$;

б) $f(t) = O(t^a)$ при $t \to 0$.

Тогда $\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right)$ при $x \to \infty$, $\operatorname{Re} x > 0$ (более точно: если x стремится к бесконечности, оставаясь внутри некоторого сектора $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$).

Доказательство. Разобьем интеграл на две части:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = \int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt + \int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt,$$

где ε - произвольное малое положительное число. Оценим вначале второй интеграл при $\operatorname{Re} x > x_0$:

$$\left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt\right| = \left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-x_0 t}e^{-(x-x_0)t}dt\right| < M|e^{-(x-x_0)\varepsilon}| = Me^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\varepsilon} = \tilde{M}e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x},$$

где $\tilde{M} = Me^{-\operatorname{Re} x_0}$. Если x стремится к бесконечности внутри указанного сектора, то при фиксированном ε интеграл $e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x}$ стремится к нулю быстрее любой степени x, т.е., $\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt = o(x^{-n})$ для всех n.

В первом интеграле для достаточно малого ε мы можем воспользоваться оценкой $|f(t)| < Ct^a$ для некоторого $C > 0$, так что

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| < C\int_0^\varepsilon t^a e^{-\sigma t}dt,$$

где $\sigma = \operatorname{Re} x$. Увеличим в последнем интеграле интервал интегрирования до бесконечного

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| < C\int_0^\infty t^a e^{-\sigma t}dt = \frac{C}{\sigma^{a+1}}\int_0^\infty (\sigma t)^a e^{-\sigma t}d\sigma t = C\frac{\Gamma(a+1)}{\sigma^{a+1}}$$
$$= O\left(\frac{1}{\sigma^{a+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right),$$

если $x \to \infty$, оставаясь в секторе $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$.

Из леммы следует, что если функция $f(t)$ такова, что $|f(t)| < e^{x_0 t}$ при больших t и $f(t) = a_1 t^{\alpha_1} + \cdots a_n t^{\alpha_n} + O(t^{\alpha_{n+1}})$ при $t \to 0$ и некоторых $a_1, ..., a_n$ и вещественных $\alpha_1, ...\alpha_{n+1}$, таких, что $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n+1}$, то

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = a_1\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{x^{\alpha_1+1}} + \cdots + a_n\frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{x^{\alpha_n+1}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha_{n+1}+1}}\right).$$

Например, для функции $f(t)$, растущей на бесконечности не быстрее некоторой экспоненты и имеющей в нуле асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^k, \qquad t \to 0,$$

ее преобразование Лапласа $F(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$ имеет асимптотическое разложение в описанном выше секторе

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!x^{k+1}}, \qquad x \to \infty.$$

Заметим, что все рассуждения и результаты остаются верными и для всякого конечного интеграла $\int_0^b f(t)e^{-xt}dt$ – бесконечный отрезок интегрирования, отделенный от нуля, каждый раз дает экспоненциально малый вклад.

5. Подобным же образом оцениваются интегралы вида

$$I(x) = \int_0^\infty g(t)e^{x\varphi(t)}dt,$$

где $\varphi(t)$ - монотонно убывающая от 0 к $-\infty$ вещественнозначная функция. А именно, сделаем в интеграле замену переменных $t = -\psi(\tau)$, где $t = \psi(\tau)$ – функция, обратная к $\tau = \varphi(t)$:

$$I(x) = \int_0^\infty g(\psi(\tau))e^{-x\tau}d(-\psi(\tau)) = -\int_0^\infty g(\psi(\tau))\psi'(\tau)e^{-x\tau}d\tau.$$

Таким образом, задача сводится к оценке интеграла Лапласа $I(x) = -\int_0^\infty f(\tau)e^{-x\tau}d\tau$, где $f(\tau) = g(\psi(\tau))\frac{d\psi(\tau))}{d\tau}$. Если обе функции $g(t)$ и $\varphi(t)$ имеют асимптотические разложения в нуле,

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \qquad g(t) =\sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \qquad t \to 0,$$

то и функция $f(\tau)$ имеет асимптотическое разложение в нуле $f(\tau) \sim \sum_{k=0}^\infty c_k\tau^k$, коэффициенты которого находятся реккурентно (для этого фактически требуется обращение первого ряда):

$$c_0 = b_0a_1^{-1},\ c_1 = b_1a_1^{-2} - 2a_2b_0a_1^{-4},\ \ldots$$

и определяют коэффициенты асимптотического разложения интеграла $I(x)$. Как и раньше, те же оценки верны и для интеграла с конечным верхним пределом.

5. Интегралы гауссова типа. Пусть $f(t)$ - функция такая, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt$ абсолютно сходится при больших x. Преобразование

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt = \int_0^{+\infty}(f(t) + f(-t))e^{-xt^2}dt$$

и последующая замена переменных $t = \sqrt{\tau}$ также сводят этот интеграл к интегралу Лапласа

$$\int_0^{+\infty}(f(\sqrt{\tau}) + f(-\sqrt{\tau}))e^{-x\tau}\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}$$

Таким образом, если функция $f(t)$ имеет в нуле асимптотическую оценку

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k + O(t^{2n+1}),$$

то подинтегральная функция в последнем интеграле оценивается как

$$\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{2}(f(\tau^{\frac{1}{2}})+f(-\tau^{\frac{1}{2}}))=\sum_{k=0}^{n}a_{2k}\tau^{k-\frac{1}{2}}+O\left(\tau^{n+\frac{1}{2}}\right),$$

так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-xt^2}dt=\sum_{k=0}^{n}a_{2k}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{x^{k+\frac{1}{2}}}+O\left(\frac{1}{x^{k+\frac{3}{2}}}\right).$$

Как и раньше, эта же оценка верна для интеграла по любому интервалу, содержащему 0.

6. Метод перевала. Метод перевала в простейшей версии описывает асимптотическое вычисление интеграла $I(x)=\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt$, где $\varphi(t)$ имеет единственный максимум во внутренней точке $t_0\in(a,b)$. Имеем

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt=\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t_0)+x(\varphi(t)-\varphi(t_0))}dt=e^{x\varphi(t_0)}\int_a^b g(t)e^{x(\varphi(t)-\varphi(t_0))}dt.$$

Сделаем замену переменных $t=\psi(\tau$, обращающую соотношение $\varphi(t)-\varphi(t_0)=-\tau^2$:

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt=\int_{\psi(\tau)=a}^{\psi(\tau)=b}f(\tau)e^{-x\tau^2}d\tau,$$

где $f(\tau)=g(\psi(\tau))\psi'(\tau)$. Следовательно, частное $I(x)/e^{x\varphi(t_0)}$ имеет асимптотическое разложение при $x\to+\infty$:

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt\sim e^{x\varphi(t_0)}\left(\sum_{k\geq 0}^{n}c_{2k}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}}{x^{n+\frac{1}{2}}}+O\left(\frac{1}{x^{n+\frac{3}{2}}}\right)\right),$$

где c_n - коэффициенты асимптотического разложения $f(\tau)$ в нуле, вычисляемые реккурентно по коэффициентам асимпотических разложений $g(t)$ и $\varphi(t)$ в окрестности точки $t=t_0$.

Можно также заметить, что все аргументы работают и для комплекснозначной функции $\varphi(t)$ с единственной критической точкой $t=t_0$ внутри интервала, в которой $\varphi'(t_0)=0$ и действительная часть $\varphi(t_0)$ имеет локальный максимум. В этом случае асимптотическое разложение имеет место при $x\to\infty$ и $-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg x<\frac{\pi}{2}-\delta$.

7. Формула Стирлинга. Для исследования асимптотики $\Gamma(x)$ при больших положительных x чуть более удобно представить $\Gamma(x)$ в виде

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^x d\tau=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau+x\log\tau}d\tau.$$

Подинтегральная функция обращается в ноль на концах интервала интегрирования и имеет максимум в точке $\tau=x$, где $(-\tau+x\log\tau)'=-1+x/\tau=0$. Сдвинем точку макимума в 0 заменой переменных $\tau=x(t+1)$. Получим

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x-tx+x\log x(t+1)}xdt=x^xe^{-x}\int_{-1}^\infty e^{x(-t+\log(t+1))}dt,$$

так что

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-1}^{\infty} e^{xp(t)} dt, \qquad p(t) = -t + \log(t+1)$$

где функция $p(t)$ имеет единственный экстремум с максимумом действительной части в точке 0. К этому интегралу применим метод перевала:

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau^2} \psi'(\tau) d\tau,$$

где $t = \psi(\tau)$ есть решение уравнения $t - \log(t+1) = \tau^2$. Для нахождения асимтотического разложения этого интеграла необходимо найти асимптотическое разложение функции $t = \psi(\tau)$ в нуле. Пусть $t = \psi(\tau) = a_1\tau + a_2\tau^2 + ... + a_n\tau^n + O(\tau^{n+1})$. Найдем первые члены разложения:

$$t - \log(1+t) = t - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + O(t^4) = \frac{1}{2}(a_1\tau + a_2\tau^2 + O(\tau^3))^2 - \frac{1}{3}(a_1\tau + O(\tau^2))^3 = \tau,$$

откуда $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Аналогично $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{18}$. Отсюда $\psi'(\tau) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \sqrt{2}6\tau^2 + O(\tau^3)$. Итак, при $x \to \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n} c_{2k} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}}{x^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{n+1+\frac{1}{2}}}\right),$$

где $c_0 = \sqrt{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, т.е.,

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Общая формула коэффициентов асимптотического разложения $\Gamma(x)$ неизвестна.