Глава 9

Приложения формулы Римана–Роха

Формула Римана–Роха

$$l(D) - l(K - D) = d + 1 - g$$

и различные ее обобщения имеют многообразные применения и выступают в качестве постоянно действующего инструмента в современной алгебраической геометрии. В этой главе мы обсуждаем простейшие, но от того не менее важные, приложения этой формулы. Наряду с обозначением $l(K - D)$ мы будем также пользоваться обозначением $i(D)$ для размерности пространства мероморфных 1-форм, дивизор которых больше, чем D.

9.1 Задача Миттаг-Леффлера

Задача Миттаг-Леффлера стала источником, из которого зародилась теория пучков. Эта задача состоит в следующем.

Для данного набора главных частей локальных функций в полюсах на кривой определить, являются ли они главными частями некоторой мероморфной функции, определенной на всей кривой и не имеющей других полюсов.

Формулировка задачи требует уточнения, и мы перейдем к необходимым определениям. Для простоты мы будем рассматривать лишь случай полюсов первого порядка. Итак, пусть C — комплексная кривая, $x \in C$ — точка на ней и мы рассматриваем мероморфные функции, определенные в окрестности точки x и имеющие в этой точке полюс 1-го порядка или не имеющие в ней по́люса. Будем говорить, что две такие функции f_1, f_2 *имеют одинаковые главные части* в точке x, если их разность не имеет по́люса в точке x. Ясно, что отношение “иметь одинаковые главные части” является отношением эквивалентности на множестве таких функций.

Главной частью функции f в точке x называется класс эквивалентности, содержащий функцию f.

Если ввести в окрестности точки x локальную координату z с центром в точке x, то всякая функция f, имеющая полюс первого порядка в этой точке или не имеющая в ней полюса, запишется в виде ряда Лорана

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots .$$

Две такие функции f_1, f_2 имеют одинаковые главные части в том и только в том случае, если коэффициенты при z^{-1} в их разложении в ряд Лорана совпадают. Действительно, именно в этом случае разность $f_1 - f_2$ не имеет по́люса в x.

Замечание 9.1.1. Функция f, имеющая в точке $x \in C$ полюс 1-го порядка или не имеющая в ней по́люса, определяет линейный функционал на пространстве голоморфных локальных дифференциальных 1-форм в окрестности точки x: каждой голоморфной 1-форме ω можно сопоставить вычет $\mathrm{Res}_x f\omega$. Если функция f не имеет полюса в точке x, то так определенный функционал оказывается нулевым. Если же у f есть в точке x полюс, то значение этого функционала на 1-форме ω оказывается равным нулю в том и только в том случае, если $\omega(x) = 0$. Тем самым, значение этого функционала на 1-форме ω зависит лишь от кокасательного вектора, определяемого этой 1-формой. Поэтому функции f сопоставляется линейный функционал на кокасательной прямой в точке x, а значит, касательный вектор в этой точке. С другой стороны, этот касательный вектор однозначно определяется главной частью функции f в точке x. Тем самым, *главную часть функции в полюсе первого порядка можно понимать как касательный вектор в этой точке.*

Пусть теперь $f : C \to \mathbb{CP}^1$ — мероморфная функция на кривой C с полюсами первого порядка в точках $x_1, \dots, x_d$, не имеющая других полюсов. Тогда для любой голоморфной 1-формы ω на C выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{d} \mathrm{Res}_{x_i} f\omega = 0,$$

т.е. сумма вычетов 1-формы $f\omega$ в ее полюсах равна 0. Это равенство можно понимать и так: если сопоставить функции f набор $f_1, f_2, \dots, f_d$ ее главных частей в ее полюсах $x_1, \dots, x_d$, то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{d} \mathrm{Res}_{x_i} f_i\omega = 0.$$

(Отметим, что некоторые из точек $x_1, \dots, x_d$ могут не оказаться полюсами 1-формы $f\omega$. Так происходит, если 1-форма ω обращается в 0 в некоторых из точек x_i.) Следующая теорема утверждает, что справедливо и обратное утверждение, давая, тем самым, полное решение задачи Миттаг–Леффлера для главных частей функций с полюсами первого порядка.

Теорема 9.1.2 (Риман). *Для данного набора $f_1, f_2, \dots, f_d$ главных частей функций с полюсами первого порядка в точках $x_1, x_2, \dots, x_d$ кривой C (т.е. для набора касательных векторов в этих точках) функция f с таким набором главных частей существует в том и только в том случае, если*

$$\sum_{i=1}^{d} \mathrm{Res}_{x_i} f_i\omega = 0 \tag{9.1}$$

для любой голоморфной 1-формы ω на C.

Поскольку пространство голоморфных 1-форм на кривой рода g конечномерно и имеет размерность g, для проверки выполнения равенства (9.1) достаточно выбрать базис $\omega_1, \dots, \omega_g$ в пространстве голоморфных 1-форм и проверить его выполнение для них.

Доказательство. Теорему достаточно доказать в обратную сторону: если равенство (9.1) выполняется для всех голоморфных 1-форм, то функция с такими главными частями существует. Рассмотрим эффективный дивизор $D = x_1 + \dots + x_d$. Согласно теореме Римана–Роха, размерность пространства функций с полюсами не выше первого порядка в точках $x_1, \dots, x_d$, не имеющих других полюсов, равна

$$l(D) = i(D) + d + 1 - g.$$

Здесь $i(D)$ — размерность пространства голоморфных 1-форм, обращающихся в нуль в каждой из точек x_i дивизора D. Эти 1-формы не накладывают ограничений на главные части функций в этих точках. Таким образом, размерность пространства линейно независимых линейных ограничений на главные части функций в точках $x_1, \dots, x_d$ равна $g - i(D)$. Размерность же пространства этих главных частей равна d. Таким образом, формула Римана–Роха показывает, что никаких других ограничений нет: размерность всего пространства функций, с учетом подпространства констант, равна $(d+1) - (g - i(D))$, а значит, совпадает с размерностью пространства главных частей, зануляющих голоморфные 1-формы. □

Замечание 9.1.3. Если две мероморфные функции f, g на кривой C имеют один и тот же набор полюсов первого порядка и одинаковые главные части в этих полюсах, то их разность $f - g$ является мероморфной функцией без полюсов, т.е. константой. Поэтому набор главных частей мероморфной функции с полюсами первого порядка в ее полюсах определяет ее однозначно с точностью до прибавления константы.

Упражнение 9.1.4. Выведите из теоремы Римана–Роха следующее решение общей задачи Миттаг–Леффлера: для набора главных частей $f_1, \dots, f_d$ в точках $x_1, \dots, x_d$ кривой C мероморфная функция с таким набором главных частей в этих точках, не имеющая других полюсов, существует в том и только в том случае, если

$$\mathrm{Res}_{x_1} f_1\omega + \dots + \mathrm{Res}_{x_d} f_d\omega = 0$$

для любой голоморфной 1-формы ω на C. Здесь под *главной частью* функции в полюсе мы понимаем сумму “членов отрицательной степени” ее разложения в окрестности полюса: главная часть функции, имеющей разложение

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

в окрестности полюса порядка k в произвольной координате z, равна

$$\frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}.$$

Точнее говоря, две функции f_1, f_2 имеют одинаковую главную часть в своем общем полюсе, если их разность $f_1 - f_2$ не имеет полюса. Главной же частью называется класс эквивалентности функций с полюсами относительно такого отношения эквивалентности. Поскольку вычет 1-формы $f\omega$ в полюсе функции f определяется главной частью этой функции, корректно определен и вычет произведения главной части и голоморфной 1-формы. Как и в случае полюсов первого порядка, набор главных частей функции в ее полюсах произвольного порядка определяет ее однозначно с точностью до аддитивной константы.

9.2 Рациональная кривая

До сих пор мы часто упоминали о том, что проективная прямая $\mathbb{CP}^1$ — единственная комплексная кривая рода нуль. Теорема Римана–Роха позволяет доказать это утверждение.

Теорема 9.2.1. *Любая гладкая компактная комплексная кривая нулевого рода изоморфна $\mathbb{CP}^1$.*

Доказательство. Возьмем на комплексной кривой нулевого рода дивизор D, состоящий из одной точки x, взятой с кратностью 1. Размерность $i(D)$ пространства мероморфных 1-форм с нулем в точке x равна нулю, поскольку степень канонического дивизора на кривой рода $g = 0$ равна $2g - 2 = -2$. Теорема Римана–Роха дает для размерности пространства $L(D)$ мероморфных функций на такой кривой с полюсом не выше первого порядка в точке x значение

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 1 - 0 + 0 + 1 = 2.$$

Выбрав в двумерном пространстве $L(D)$ базис из двух функций f_0, f_1, первая из которых константа, $f_0 = 1$, мы получаем мероморфную функцию f_1 на нашей кривой. Степень этой функции равна 1, поскольку у нее один полюс первого порядка, а значит она осуществляет биголоморфное отображение на проективную прямую, что и требовалось. $\square$

9.3 Эллиптические кривые

Мы хотим показать, что всякая эллиптическая кривая представляется неособой плоской кубической кривой.

Теорема 9.3.1. *Любую эллиптическую кривую, т.е. кривую, гомеоморфную тору, можно вложить в проективную плоскость.*

Из формулы для рода плоской кривой вытекает теперь, что степень вложенной эллиптической кривой равна 3.

Доказательство. Как мы знаем, размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой рода 1 равна 1. При этом образующая пространства голоморфных 1-форм не имеет нулей, поэтому на эллиптической кривой нет нетривиальных голоморфных 1-форм с нулями и без полюсов. Вычислим размерность пространства мероморфных функций с фиксированным полюсом не выше первого порядка, не имеющих других полюсов. По теореме Римана–Роха эта размерность равна

$$d - g + i(D) + 1 = 1 - 1 + 0 + 1 = 1,$$

т.е. все такие функции — константы. А вот функции с одним полюсом порядка два существуют. Действительно, для дивизора $D = 2x$ имеем

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Поэтому на эллиптической кривой существует мероморфная функция с полюсом порядка два в любой наперед заданной точке, не имеющая других полюсов. Поднятие такой функции на комплексную прямую $\mathbb{C}$ при факторизации по решетке $\mathbb{C} \to C$, как и исходная функция, определено однозначно с точностью до прибавления константы и умножения на константу и сдвига. Одна из этих функций называется *функцией Вейерштрасса*, см. раздел 5.4. Это простейшая из *эллиптических функций*.

Функция Вейерштрасса $\mathcal{P}(z)$ выделяется своим разложением при $z = 0$. Она имеет в этой точке полюс порядка 2, а коэффициент при $1/z$ в этом разложении равен 0, поскольку иначе 1-форма $\mathcal{P}(z)dz$ имела бы ненулевой вычет в нуле. Отсюда вытекает, что функция Вейерштрасса четная: иначе функция $\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(-z)$ была бы непостоянной голоморфной функцией на кривой. Добавив к $\mathcal{P}(z)$ при необходимости аддитивную константу, мы можем считать, что разложение в нуле имеет вид

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots .$$

Поскольку функция Вейерштрасса определена на $\mathbb{C}$, определена и ее производная $\mathcal{P}'(z)$, которая также опускается на соответствующую эллиптическую кривую. Производная функции Вейерштрасса имеет разложение

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \dots .$$

Посмотрим теперь на функцию

$$4\mathcal{P}^3(z) - (\mathcal{P}'(z))^2.$$

Это четная функция, а ее разложение в точке $z = 0$ имеет в ней полюс второго порядка. Поэтому эта функция представляется в виде линейной комбинации функции Вейерштрасса и единичной функции. Тем самым, справедливо тождественное равенство

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}^3(z) + a\mathcal{P}(z) + b$$

для некоторых констант a и b. Другими словами, тройка функций $(\mathcal{P}(z) : \mathcal{P}'(z) : 1)$, образующая базис в пространстве $L(3\cdot 0)$, определяет отображение эллиптической кривой в плоскую кубическую кривую. Поскольку первая из этих функций четна, а вторая нечетна, отображение является взаимнооднозначным на свой образ. Комплексные числа a и b в этом представлении являются параметрами кривой; они зависят от выбранной решетки (т.е. от вектора τ в верхней полуплоскости).

Образ этого отображения задается в аффинной карте $z = 1$ уравнением

$$y^2 = 4x^3 + ax + b.$$

Проекция этой кубической кривой на ось x совпадает с функцией Вейерштрасса на эллиптической кривой, а проекция на ось y — с ее производной.

Упражнение 9.3.2. Проверьте, что для любых двух точек на эллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2, имеющая в этих точках полюса первого порядка. Выразите эту функцию через функцию Вейерштрасса.

Упражнение 9.3.3. Верно ли, что любой дивизор степени нуль на эллиптической кривой является а) главным (т.е. дивизором некоторой мероморфной функции); б) каноническим (т.е. дивизором некоторой мероморфной 1-формы)?

9.4 Гиперэллиптические кривые и кривые рода 2

Напомним, что каноническим отображением кривой C рода ≥ 2 называется ее отображение $\varphi : x \mapsto (\omega_1(x) : \cdots : \omega_g(x))$ в проективное пространство $\mathbb{CP}^{g-1}$, заданное выбором базиса $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ в пространстве голоморфных 1-форм на C (см. раздел 7.5). С более инвариантной точки зрения, рассмотрим двойственное проективное пространство $P\Lambda^\vee$ к проективизированному пространству $P\Lambda$ голоморфных 1-форм на данной кривой C. Тогда почти каждая точка $x \in C$ определяет точку в $P\Lambda^\vee$: для любых двух ненулевых голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 на C отношение $\omega_1(x) : \omega_2(x)$ их значений в почти каждой точке x есть корректно определенное число.

Докажем теперь, что не существует такой точки на кривой C, в которой все голоморфные 1-формы обращаются в нуль одновременно. Действительно, если бы такая точка x существовала, то, по теореме Римана–Роха, существовала бы мероморфная функция на C с полюсом первого порядка в этой точке (и без других полюсов):

$$l(x) = 1 - g + i(x) + 1 = 2, \text{ поскольку } i(x) = g.$$

Это означало бы, что наша кривая рациональна.

Теорема 9.4.1. *Пусть $\varphi : C \to \mathbb{CP}^{g-1}$ — каноническое отображение кривой C рода g. Если*

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

для двух различных точек x_1, x_2 кривой C, то эта кривая гиперэллиптическая, т.е. на ней существует мероморфная функция степени 2.

Доказательство. Поскольку значения голоморфных 1-форм в точке x_2 пропорциональны их значениям в точке x_1 с коэффициентом пропорциональности, общим для всех 1-форм, размерность пространства голоморфных 1-форм с нулем в точке x_1 совпадает с размерностью пространства голоморфных 1-форм с нулями в точках x_1, x_2. Поэтому теорема Римана–Роха дает значение 2 для размерности пространства мероморфных функций с полюсами не выше первого порядка в точках x_1, x_2:

$$l(x_1 + x_2) = 2 - g + (g - 1) + 1 = 2.$$

Тем самым, существует такая непостоянная мероморфная функция, а ее степень равна 2.

Упражнение 9.4.2. Верно ли, что на гиперэллиптической кривой каноническое отображение имеет степень 2?

Упражнение 9.4.3. Докажите, что если для двух точек x_1, x_2 на кривой (которая в этом случае с необходимостью является гиперэллиптической) существует функция с полюсами первого порядка в этих точках и без других полюсов, то каноническое отображение переводит эти две точки в одну.

Теорема 9.4.4. *Всякая комплексная кривая рода 2 гиперэллиптична.*

Доказательство. Каноническое отображение кривой рода 2 является разветвленным накрытием проективной прямой. Степень этого накрытия равна 2. Действительно, степень канонического дивизора на кривой рода 2 равна 2, значит у всякой ненулевой голоморфной 1-формы имеется два нуля (с учетом кратности), причем две линейно-независимые 1-формы не могут иметь общих нулей. Поэтому при каноническом отображении $x \mapsto (\omega_1(x) : \omega_2(x))$ точка $(0 : 1)$ имеет в точности два прообраза. Это означает, что степень канонического отображения равна 2, и оно осуществляет гиперэллиптическое накрытие проективной прямой. □

Упражнение 9.4.5. Всякая мероморфная функция степени 2 на комплексной кривой определяет на этой кривой инволюцию — автоморфизм второго порядка, переставляющий прообразы каждой точки из $\mathbb{CP}^1$. Неподвижные точки этой инволюции — критические точки функции. Найдите размерность пространства $L(D)$ мероморфных функций на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ для случаев а) $D = 2x$, где x — неподвижная точка инволюции; б) $D = 2x$, где x не является неподвижной точкой инволюции; в) $D = x_1 + x_2$, где точки x_1, x_2 образуют орбиту инволюции; г) $D = x_1 + x_2$, где точки x_1, x_2 не образуют орбиту инволюции.

9.5 Вычисление Римана

Теорема Римана–Роха позволяет подсчитать — по крайней мере грубо — размерность пространства кривых данного рода. Мы знаем размерность пространства кривых рода 0 — она равна нулю, и размерность пространства кривых рода 1 — она равна 1. Соответствующее вычисление для кривых рода $g \geq 2$ выполнено Риманом.

Рассмотрим пространство мероморфных функций степени d на кривых рода g. У общей функции из этого пространства все точки ветвления простые. По формуле Римана–Гурвица число этих простых точек ветвления равно $2d + 2g - 2$. Это означает, что *размерность пространства мероморфных функций степени d на кривых рода g равна* $2d + 2g - 2$. Действительно, теорема Римана показывает, что число мероморфных функций с фиксированными точками ветвления и заданными в них порядками ветвления конечно, поэтому пространство таких функций локально параметризуется их точками ветвления. А значит, его размерность равна размерности пространства таких точек.

Тем самым, мы знаем размерность пространства мероморфных функций с d полюсами порядка не выше первого на кривых произвольного рода g. С другой стороны, мы можем подсчитать, по теореме Римана–Роха, размерность пространства таких функций на каждой отдельной кривой рода g. При $d \geq 2g$ эта размерность равна $2d - g + 1$. Действительно, у голоморфного дифференциала на кривой рода g имеется $2g - 2$ нулей, поэтому $i(D) = 0$ для любого дивизора D степени, не меньшей $2g - 1$. Группа автоморфизмов кривой рода g (а, значит, и пространства мероморфных функций на ней) конечна. Поэтому размерность пространства кривых рода $g \geq 2$ равна

$$(2d + 2g - 2) - (2d - g + 1) = 3g - 3.$$

Естественный способ сделать подобную формулу "общей", т.е. распространить ее также на кривые рода 0 и 1, состоит в том, чтобы сделать эти кривые "жесткими", "убив" их непрерывные автоморфизмы. Такой эффект достигается, если рассматривать кривые с отмеченными точками. Отметим на кривой n точек $x_1, \ldots, x_n$, и будем считать две кривые с отмеченными точками изоморфными, если существует биголоморфное отображение одной из них на другую, переводящее отмеченные точки в отмеченные.

Замечание 9.5.1. Существует два варианта этой конструкции. В первом отмеченные точки различаются между собой, во втором они неразличимы. Соответственно, в первом варианте изоморфизмами считаются такие биголоморфизмы, которые переводят каждую отмеченную точку в точку с такой же отметкой, а во втором изоморфизм может переставлять отмеченные точки. В дальнейшем мы будем рассматривать только первый вариант.

На кривых рода $g \geq 2$ добавление очередной отмеченной точки повышает размерность пространства таких кривых на единицу: размерность пространства кривых рода g с n отмеченными точками равна $3g - 3 + n$. Это утверждение верно и для кривых младших родов, однако начиная с некоторого количества добавленных точек. Эллиптические кривые ($g = 1$) приобретают жесткость уже при добавлении одной отмеченной точки, и размерность пространства таких кривых с n отмеченными точками равна $3g - 3 + n = n$ при $n \geq 1$. Для того, чтобы стала жесткой рациональная кривая, на ней надо отметить три точки: для любых двух упорядоченных троек точек на рациональной кривой существует единственный автоморфизм кривой, переводящий первую тройку во вторую с сохранением порядка. При $n \geq 3$ размерность пространства рациональных кривых с n отмеченными точками также равняется $3g - 3 + n = n - 3$. Локальными координатами на этом пространстве могут служить координаты точек $x_4, \dots, x_n$ относительно координаты, в которой $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

9.6 Гиперэллиптические кривые и кривые рода 3

Теперь нетрудно усмотреть, что не всякая кривая рода 3 является гиперэллиптической. Действительно, на всякой гиперэллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2. По формуле Римана–Гурвица, такая функция на кривой рода g имеет $2g+2$ простых критических значений. На пространстве критических значений действует группа дробно-линейных преобразований образа, размерность которой равна 3. Функции, переходящие друг в друга при такой замене, определены на одной и той же гиперэллиптической кривой. Поэтому пространство гиперэллиптических кривых рода g имеет размерность $2g - 1$.

При $g = 2$ размерность $2g - 1 = 3$ пространства гиперэллиптических кривых совпадает с размерностью $3g - 3 = 3$ пространства всех кривых, что согласуется с доказанным нами ранее утверждением о том, что всякая кривая рода 2 гиперэллиптическая. При $g = 3$ размерность пространства всех кривых равна $3g - 3 = 6$, тогда как гиперэллиптические кривые лишь образуют подмногообразие размерности $2g - 1 = 5$, т.е. гиперповерхность, в этом пространстве.

Плоская кривая степени $d = 4$ имеет род $(d-1)(d-2)/2 = 3$. Посмотрим, всякая ли кривая рода 3 реализуется таким образом. Каноническое отображение отправляет кривую рода 3 в плоскость. На негиперэллиптических кривых каноническое отображение является изоморфизмом на образ, поэтому всякая негиперэллиптическая кривая рода 3 вкладывается в плоскость. Степень образа канонического отображения равна 4, поскольку иначе этот образ представлял бы кривую другого рода.

Упражнение 9.6.1. Вычислите размерность пространства гладких плоских кривых степени 4 и проверьте тем самым, что почти всякая такая кривая является образом канонического отображения кривой рода 3.

Упражнение 9.6.2. Докажите, что не всякая комплексная кривая рода 10 реализуется как гладкая плоская кривая.