Семинар по спецфункциям. Листок 7

Пусть R- область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{R}$ - предельная точка R. Последовательность функций $\varphi_n(z)$, $n \geq 1$, $z \in R$ называется асимптотической последовательностью при $z \to z_0$ в R, если все $\varphi_n(z)$ определены в R и для всякого $n \geq 1$ $\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$ при $z \to z_0$.

Пусть $\varphi_n(z)$ - асимптотическая последовательность. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$ называется асимптотическим разложением функции $f(z)$ при $z \to z_0$ в R, $f(z) \sim \sum_{n\geq 1} a_n\varphi_n(z)$, если для всякого $n \geq 1$ выполнено соотношение $f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(z) = o(\varphi_n(z))$, $z \to z_0$, $z \in R$; еще лучше, если $f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(z) = O(\varphi_{n+1}(z))$ (другой вариант определения).

1. Пусть $\varphi_n(z)$ - асимптотическая последовательность.
   а)* Докажите, что для всякого ряда $\sum_{n\geq 1} a_n\varphi_n(z)$ найдется функция $f(z)$, имеющая этот ряд свои асимптотическим разложением при $z \to z_0$.
   б)* Пусть $f(z)$ - однозначная голоморфная функция в проколотой окрестности U бесконечно удаленной точки и во всей этой окрестности $f(z) \sim \sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$. Тогда ряд сходится $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ сходится в U и $f(z)$ является его суммой.

2. а) Найдите реккурентно первые три члена асимптотического разложения $x(\lambda)$ корней уравнения $x^3 + ax = \lambda^3$ при $\lambda \to \infty$.
   б)* Найдите полное асимптотическое разложение одного из корней. Является ли оно разложением корня в сходящийся степенной ряд?

3. а) Определение константы Эйлера γ эквивалентно следующей оценке частичной суммы гармонического ряда: $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \log N + \gamma + o(1)$ при $N \to \infty$. Докажите, что: $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \log N + \gamma + O(1/N)$ при $N \to \infty$.
   б)* Улучшите предыдущую оценку в следующем порядке:
   $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} + O(1/N^2), \qquad N \to \infty.$
   в)** Выведите асимптотическое разложение Эйлера:
   $$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} \sim \log N + \gamma - \sum_{n\geq 1} \frac{B_{2n}}{2nN^{2n}}, \qquad N \to \infty.$$
   Здесь B_{2n}- числа Бернулли. Эйлер использовал это разложение при $n = 10$ для вычисления γ с точностью до 15 знаков после запятой.

4. *. Согласно Вейерштрассу, $\log\Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n\geq 1} f(z/n)$, где $f(z) = z - \log(1+z)$. Выразите каждый коэффициент в асимптотическом ряде Стирлинга
$$\log\Gamma(z) \sim (z - \frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{s\geq 1} \frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}}, \qquad z \to \infty$$
через значения ζ и ее производных и коэффициенты разложения $f(z)$ в бесконечности.

5. * (Двусторонним) преобразованием Лапласа кусочно-непрерывной функции $f(t)$ называется функция комплексного аргумента $F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$. Оно корректно определено для функций $f(t)$ таких, что $|f(t)| < e^{at}$ при $t \to +\infty$ и $|f(t)| < e^{bt}$ при $t \to -\infty$, где $a < b$; тогда $F(p)$ аналитично в полосе $a < \mathrm{Re}\, p < b$. В этом случае имеет место формула обращения
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \qquad a < c < b.$$
Преобразованием Меллина функции $\varphi(x)$ называется функция $\Phi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x)x^{s-1}dx$, $s \in \mathbb{C}$. Оно определено при непустой области абсолютной сходимости интеграла.
   а) Выразите преобразование Меллина функции $\varphi(x)$ через преобразование Лапласа функции $\psi(t) = \varphi(e^{-t})$. Напишите формулу обращения преобразования Меллина.
   б) Вычислите преобразование Лапласа функции $\theta(t)$, где $\theta(t) = 1$, $t \geq 0$, $\theta(t) = 0$, $t < 0$. Проверьте в этом случае формулу обращения.
   в) Пусть $\Phi(s)$ - преобразование Меллина функции $\varphi(x)$. Опишите преобразование Меллина функций: $\varphi(\lambda x)$, $x^{\alpha}\varphi(x)$, $\varphi(x^{\lambda})$, $\varphi(x^{-1})$, $\varphi'(x)$. Перечислите аналогичные свойства преобразования Лапласа.