"Спецфункции". Тезисы 7-ой лекции.

Интегральные преобразования

1. Широко известны три интегральных преобразования:

1. преобразование Фурье: $f(x) \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda x}dx$;
2. преобразование Лапласа $f(t) \mapsto F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$;
3. преобразование Меллина $\varphi(\tau) \mapsto \check{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\tau^{s-1}d\tau$

Преобразование Фурье широко используется для решения дифференциальных уравнений, в особенности краевых задач с условиями на бесконечности. Преобразование Меллина мы уже использовали несколько раз при изучении свойств Г-функции Эйлера и ζ-функции Римана.Преобразование Лапласа естественно возникает при оценке интегралов методом перевала; но чаще оно используется при решении задач типа задачи Коши в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Этот метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений носит имя операционного исчисления.

Интересна история возникновения операционного исчисления. Технику операторного метода решения систем обыкновенных дифференциальных придумал и разработал Оливер Хевисайд в конце 19 века, знаменитый ученый-самоучка, работавший в то время в английской телеграфной компании. Исходная идея Хевисайда весьма проста и прозрачна: к примеру, дифференциальное уравнение $a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_1 x' + a_0 x = f(t)$ может быть интерпретировано как рещение уравнения $L(x(t)) = f(t)$, где L - линейный оператор на пространстве функций, представленный в виде $L = a_n p^n + \cdots a_1 p^1 + a_0 p^0$. Здесь $p = \frac{d}{dt}$ - оператор дифференциирования. Для решения этого уравнения необходимо обратить оператор L. В частности, придется обращать оператор диффиренциирования p. Имея в виду в дальнейшем задачу Коши в нулевой момент времени, считаем, что применение оператора p^{-1} к функции $f(t)$ есть интеграл $(p^{-1}f)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. В частности, применение p^{-1} к единичной функции есть $\int_0^t d\tau = t$, $p^{-2}(1) = \int_0^t \tau d\tau = t^2/2$, ... $p^{-n}(1) = t^n/n!$.

Пример. Решим таким образом задачу Коши $x' - x = 1$, $x(0) = 0$. Заменяя дифференциирование на p, получаем равенство $(p-1)x = 1$, откуда

$$x = \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p(1-p^{-1})} = p^{-1} + p^{-2} + \cdots p^{-n} = t + ... + \frac{t^n}{n!} + ... = e^t - 1.$$

Этот метод вначале без строгого математического обоснования был доведен в электротехнике до алгеритмов, правильно вычисляющих токи и напряжения в электрических цепях и лишь в 20-х годах 20 века Бромвич и Карсон показали, что операторный метод состоит в использовании преобразования Лапласа.

Ключевым моментом при этом является вычисление преобразования Лапласа от производной. Пусть $f(t)$ - функция положительного аргумента, растущая не быстрее некоторой экспоненты, $|f(t)| < e^{Mt}$. Пусть $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ - преобразование Лапласа функции $f(t)$ ($F(p)$ принято называть изображением, а $f(t)$ - оригиналом). Тогда функция $F(p)$ аналитична в области $\operatorname{Re} p > M$. Например, интеграл, задающий преобразование Лапласа функции $e^{\lambda t}$, сходится при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$ и равен в этом случае $\frac{1}{p-\lambda}$. Преобразование Лапласа от $f'(t)$ в области его аналитичности есть

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}|_{t=0}^{\infty} + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = f(0) + pF(p).$$

Итерируя, получаем, что преобразование Лапласа второй производной $f''(t)$ есть $p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$.

Пример. Решим при помощи преобразования Лапласа задачу Коши $x(0) = x'(0) = 0$ для уравнения $x'' - x = e^{2t}$. Обозначим преобразование Лапласа от $x(t)$ через $X(p)$. Тогда

$$(p^2-1)X(p) = \frac{1}{p-2}, \qquad \text{откуда} \quad X(p) = \frac{1}{(p-2)(p^2-1)}.$$

Разлагая последнюю дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{1}{6(p+1)} - \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{3(p-2)}, \qquad \text{откуда} \quad x(t) = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

2. Обращение преобразования Лапласа. Пусть $F(p)$ - преобразование Лапласа функции $f(t)$, аналитическое в полуплоскости $\operatorname{Re} p > M$. Тогда имеет место формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \tag{1}$$

где $c > M$, т.е., контур интегрирования - прямая, параллельная мнимой оси и целиком лежащая в области аналитичности функции $F(p)$. Интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.,

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \lim_{R\to\infty}\int_{c-iR}^{c+iR} F(p)e^{pt}dp.$$

Проверим формулу для функции $f(t) = e^{\lambda t}$. В этом случае $F(p) = \frac{1}{p-\lambda}$, так что речь идет о вычислении интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{p-\lambda}e^{pt}dp, \qquad c > \operatorname{Re} p.$$

Для вычисления интеграла методами ТФКП контур интегрирования следует дополнить до замкнутого, так, что бы в пределе $R \to \infty$ интеграл по дополненному контуру устремился к нулю. Для этого можно воспользоваться леммой Жордана:

Если на некоторой последовательности дуг окружностей C_{R_n}: $|z| = R_n, \operatorname{Im} z > -a$ ($R_n \to \infty$, a фиксировано) функция $g(z)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg z$, то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0.$$

Здесь важно условие $\lambda > 0$ - оно гарантирует, что действительная часть показателя экспоненты отрицательна на большей части дуги интегрирования, так что сама экспонента мала в пределе $R \to \infty$.

В нашей ситуации (заменяя p на ip) лемма Жордана говорит о том, что при $t > 0$ конечный контур интегрирования можно замкнуть дугой C_R окружности радиуса R в левой от прямой $\operatorname{Re} p = c$ полуплоскости, а при $t < 0$ - в правой от прямой $\operatorname{Re} p = c$ полуплоскости. В обоих случаях на добавленных дугах $\operatorname{Re} pt < 0$. В качестве $g(p)$ фигурирует функция

$\frac{1}{p-\lambda}$, стремящаяся к нулю при $p \to \infty$. Во втором случае у подинтегральной функции нет полюсов внутри замкнутого контура интегрирования, в первом же

$$\int_{c-iR}^{c+iR} \frac{e^{pt}}{p-\lambda}dp + \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p-\lambda}dp = 2\pi i \operatorname{Res}_{p=\lambda} \frac{e^{pt}}{p-\lambda}dp = 2\pi i e^{\lambda t}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{p-\lambda}e^{pt}dp = \begin{cases} e^{\lambda t}, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Это напоминает нам о том, что исходная функция была равна $e^{\lambda t}$ при $t>0$ и нулю при $t<0$.

3. Преобразование Меллина. Если в формуле преобразования Меллина

$$\varphi(\tau) \mapsto \check{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau}$$

сделать замену переменной интегрирования $\tau = e^{-t}$, то получившееся интегральное преобразование с точностью до знака весьма напоминает преобразование Лапласа от функции $g(t) = \varphi(e^{-t})$ с той лишь разницей, что интегрирование теперь ведется по всей прямой, на которой функция $g(t)$ нетривиальна всюду:

$$\check{\varphi}(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^{-t})e^{-st}dt, \qquad \tau = e^{-t}.$$

Такой интеграл иногда называют двусторонним преобразованием Лапласа. Таким образом, преобразование Меллина функции $\varphi(\tau)$ совпадает с точностью до знака с двусторонним преобразованием Лапласа функции $g(t) = \varphi(e^{-t})$.

Несобственный интеграл в преобразовании Меллина имеет две особенности - в нуле и на бесконечности. Если $\varphi(t) = O(t^{-a})$ при $t \to 0$, то интеграл в нуле сходится при $\operatorname{Re} s > a$, если же $\varphi(t) = O(t^{-b})$ при $t \to \infty$, то интеграл в нуле сходится при $\operatorname{Re} s < b$, и преобразование Меллина будет аналитично в полосе $a < \operatorname{Re} s < b$.

В двустороннем преобразавании Лапласа функции $g(t)$ интеграл сходится на $+\infty$ при $\operatorname{Re} s > a$, если $g(t) = O(e^{ta})$ при $t \to +\infty$ и сходится на $-\infty$ при $\operatorname{Re} s < b$, если $g(t) = O(e^{tb})$ при $t \to -\infty$. В этом случае преобразование Меллина аналитично в той же полосе $a < \operatorname{Re} s < b$, что согласуется со связью преобразований между собой.

Для двустороннего преобразования Лапласа имеет место та же формула обращения, что и для одностороннего, с тем условием, что контур интегрирования должен целиком проходить в области аналитичности образа $F(p)$, который теперь уже не полуплоскость, а полоса $a < \operatorname{Re} s < b$.

Пользуясь связью двустороннего преобразования Лапласа и преобразования Меллина, получаем формулу обращения для преобразования Меллина:

$$\varphi(\tau) \underset{(t=-\log\tau)}{=} \varphi(e^{-t}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \check{\varphi}(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \check{\varphi}(s)\tau^{-s}ds.$$

С другой стороны, и формула преобразования Фурье отличается от формулы двустороннего преобразования Лапласа лишь заменой p на $i\lambda$ (что объясняет отсутствие поворота контура интегрирования в обратном преобразовании Фурье), так что формулы обращения всех трех преобразований по сути совпадают.

Существенна разница в классах функций, к которым применяются соответствующие преобразования. В случае преобразования Лапласа это функции, равные нулю на полупрямой, за счет чего их образ аналитичен в полуплоскости; для двустороннего преобразования Лапласа и эквивалентного ему преобразования Меллина это функции с умеренным ростом на обоих концах вещественной - их образ аналитичен в полосе.

Наконец, преобразование Фурье применяется либо к квадратично-интегрируемым функциям на прямой с таким же образом, либо к осцилирующим функциям с обобщенными функциями на прямой в качестве образа. В обоих случаях речь о комплексной аналитичности образа обычно не идет.

4. Свойства преобразования Меллина. Вычислим преобразование Меллина от функции $\dfrac{\tau d\varphi(\tau)}{d\tau}$:

$$\tau\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau)\mapsto\int_0^\infty\tau\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau)\tau^s\frac{d\tau}{\tau}=\int_0^\infty\tau^s d\varphi(\tau)=\tau^s\varphi(\tau)|_{\tau=0}^\infty-s\int_0^\infty\tau^s\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=-s\check{\varphi}(s)-\varphi(0),$$

если s находится в области аналитичности $\check{\varphi}(s)$. Благодаря этому свойству преобразование Меллина применяется для решения задач Коши в дифференциальных уравнениях, содержащих однородные производные $\tau\frac{d}{d\tau}$.

Другое применение преобразование Меллина уже использовалось нами для анализа сумм вида $\sum_{n\geq 1}f(nz)$. Оно основано на следующем свойстве:

$$\varphi(n\tau)\mapsto\int_0^\infty\varphi(n\tau)\tau^s\frac{d\tau}{\tau}=\int_0^\infty\varphi(n\tau)\frac{(n\tau)^s}{n^s}\frac{dn\tau}{n\tau}=\frac{1}{n^s}\int_0^\infty\varphi(\tau)\tau^s\frac{d\tau}{\tau}=\frac{1}{n^s}\check{\varphi}(s).$$

Таким образом, преобразование Меллина от функции

$$f(\tau)=\sum_{n\geq 1}\varphi(n\tau)$$

есть произведение

$$\zeta(s)\check{\varphi}(s)$$

ζ-функции Римана на преобразование Меллина исходной функции. Далее мы применим это свойство для исследования асимптотических свойств таких сумм, в частности, для исследования асимптотического разложения логарифма Г-функции Эйлера.