# Задачи по группам и алгебрам Ли – 2

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

**1.** Докажите, что всякая связная одномерная группа Ли изоморфна либо аддитивной группе $\mathbb{R}$, либо окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

**2.** Найдите все гомоморфизмы между связными одномерными группами Ли.

**3.** Докажите, что для линейно зависимых $x, y, z$ тождество Якоби $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ следует из антикоммутативности операции $[,]$.

**4.** *Алгеброй Гейзенберга* называется 3-мерная алгебра Ли строго верхнетреугольных матриц $3\times 3$. **а)** Выпишите явно в каком-нибудь базисе операцию коммутатора и укажите все идеалы в этой алгебре Ли. **б)** Укажите какую-нибудь связную группу Ли с такой алгеброй Ли, и докажите, что соответствующее экспоненциальное отображение сюръективно.

**5.** **а)** Найдите алгебру Ли (укажите какой-нибудь базис и выпишите операцию коммутатора в этом базисе) всех дифференцирований кольца $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. **б)** Найдите все идеалы в этой алгебре Ли.

**6.** Пусть $D$ – дифференцирование некоторой конечномерной алгебры $A$ (не обязательно ассоциативной). Докажите, что $\exp D$ – автоморфизм алгебры $A$.

**7.** Найдите алгебру Ли дифференцирований и группу Ли автоморфизмов ассоциативной алгебры **а)** двойных чисел $\mathbb{R}[x]/(x^2)$; **б)** кватернионов; **в)** матриц $2\times 2$.

**8.** **а)** Покажите, что 3-мерное пространство векторных полей на комплексной прямой вида $(az^2 + bz + c)\frac{\partial}{\partial z}$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$, замкнуто относительно коммутатора и образует алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. **б)** Получилось представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{C}[z]$. Найдите все его подпредставления. **в)** Тот же вопрос для представления той же алгебры Ли в пространстве полиномиальных 1-форм (т.е. выражений вида $f(z)dz$, где $f(z)$ многочлен) при помощи производной Ли.

**9.** Докажите, что универсальная накрывающая группы собственных движений вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ диффеоморфна $\mathbb{R}^3$, и выпишите операцию умножения явно в каких-нибудь координатах на этом $\mathbb{R}^3$.

**10.** **а)** Постройте нетривиальное одномерное представление группы Ли из предыдущей задачи. **б)** Укажите какое-нибудь точное линейное представление группы Ли из предыдущей задачи. *Указание:* точное представление может быть прямой суммой неточных.

**11*.** Докажите, что всякая связная компактная комплексная группа Ли абелева.

**12*.** Существует ли компактная группа Ли $G$, такая, что $\mathrm{Lie}\ G$ есть алгебра Гейзенберга?

**13*.** **а)** Укажите какое-нибудь точное конечномерное представление алгебры Гейзенберга. **б)** Докажите, что у алгебры Гейзенберга нет *неприводимых* точных конечномерных представлений, **в)** зато есть неприводимые точные *бесконечномерные* представления.

**14*.** Докажите, что все дифференцирования матричной алгебры $Mat_n(\mathbb{C})$ внутренние, т.е. имеют вид $X \mapsto [A, X]$ для некоторого $A \in Mat_n(\mathbb{C})$.

**15*.** Докажите, что универсальная накрывающая группы $SL_2(\mathbb{R})$ не является линейной группой Ли, т.е. не имеет точных конечномерных представлений. *Указание:* если представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ комплексифицировать, то получится представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.