Вычисление стационарного распределения.

Рассматривается цепь Маркова (X_n) с тремя состояниями и переходной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Найти стационарное распределение для этой цепи.

Эргодическая теорема.

Рассматривается цепь Маркова (X_n) с четырьмя состояниями $\{1,2,3,4\}$ и переходной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

При $n \to \infty$ случайная величина

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (X_k)^3$$

сходится почти наверное к константе. Каково значение этой константы?

Характеризация состояния.

- *Рассматривается однородная цепь Маркова (X_n) на $\{1,2,\ldots,8\}$, исходящая из состояния 3. Всегда ли верно следующее утверждение:*
  Если состояние 3 рекуррентное, то вероятность посетить это состояние бесконечное число раз равна 1.
- *Рассматривается однородная цепь Маркова (X_n), исходящая из состояния 1. Всегда ли верно следующее утверждение:*
  Если состояние 1 транзитивное, то цепь возвращается в среднем конечное число раз в это состояние.
- *Рассматривается однородная цепь Маркова (X_n) на $\{1,2,\ldots,12\}$, исходящая из состояния 10. Всегда ли верно следующее утверждение:*
  Если состояние 10 транзитивное, то цепь возвращается в среднем бесконечное число раз в это состояние.

- *Рассматривается однородная цепь Маркова (X_n) на $\mathbb{N}$, исходящая из состояния 3. Всегда ли верно следующее утверждение:*
  Если вероятность того, что цепь возвращается в состояние 3 равна нулю, то состояние 3 транзитивное?

Связь между состояниями.

Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 4 и матрица перехода которой равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Указать ***все*** *состояния, которые сообщаются с состоянием 4.*

Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 6 и матрица перехода которой равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Указать ***все*** *состояния, которые сообщаются с состоянием 2.*

Асимптотическое поведение.

1) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 13 и матрица перехода P которой периодична с периодом 2.*
   Что можно сказать о поведении последовательности $(P^{2n})_{ii}$ при $n \to \infty$, если известно, что состояние i транзитивно?

2) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 19 и матрица перехода P которой апериодична. Пусть i и j - два различных состояния цепи.*
   Что можно сказать о поведении последовательности $(P^n)_{ij}$ при $n \to \infty$, если известно, что состояние i транзитивно, j - рекуррентное положительное и состояние j достижимо из состояния i?

3) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, (X_n) на $\mathbb{N}$, матрица перехода P которой апериодична. Пусть i и j - два различных состояния цепи.*

Что можно сказать о поведении последовательности $(P^n)_{ij}$ *при* $n \to \infty$*, если известно, что состояние* i *рекуррентное, а* j *– рекуррентное положительное?*

4) *Рассмотрим однородную цепь Маркова,* (X_n) *на* $\mathbb{N}$*, матрица перехода* P *которой апериодична. Пусть* i *- состояние этой цепи. Что можно сказать о поведении последовательности* $(P^n)_{ii}$ *при* $n \to \infty$*, если известно, что состояние* i *транзитивно?*

Нахождение периода состояния.

1) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 15. Пусть* P *её матрица перехода.*

Что можно сказать о периоде состояния 8, если известно, что

$$(P^5)_{8,8} > 0, (P^3)_{8,8} > 0, (P^1)_{8,8} > 0 \text{ и } (P^2)_{8,8} > 0.$$

2) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 28. Пусть* P *её матрица перехода.*

Что можно сказать о периоде состояния 19, если известно, что

$$(P^5)_{19,19} > 0, (P^4)_{19,19} > 0, (P^6)_{19,19} > 0 \text{ и } (P^1)_{19,19} > 0$$

Рекуррентные состояния.

1) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 5. Её матрица перехода имеет вид*

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	*	*	0	0	0
(2)	*	*	0	0	0
(3)	*	*	*	*	*
(4)	0	0	0	*	*
(5)	0	0	0	*	*

*где * соответствуют ненулевым элементам. Указать все рекуррентные состояния этой цепи.*

2) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 5. Её матрица перехода имеет вид*

$$
\begin{array}{cccccc}
 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\
(1) & * & 0 & 0 & * & 0 \\
(2) & 0 & * & * & 0 & 0 \\
(3) & 0 & * & * & 0 & 0 \\
(4) & * & 0 & 0 & * & 0 \\
(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & *
\end{array}
$$

*где * соответствуют ненулевым элементам. Указать все рекуррентные состояния этой цепи.*

Неприводимость цепи Маркова.

1) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 4. Её матрица перехода имеет вид*

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}
\end{pmatrix}
$$

Является ли эта цепь неприводимой?

Достижимые состояния.

1) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 4. Её матрица перехода имеет вид*

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}
\end{pmatrix}
$$

Указать все состояния, достижимые из состояния 1.

1) *Рассмотрим однородную цепь Маркова, состояния которой занумерованы от 1 до 4. Её матрица перехода имеет вид*

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Указать все состояния, достижимые из состояния 3.

Связь между двумя состояниями.

1) *Пусть* i *и* j *– два различных состояния однородной цепи Маркова* (X_n) *на* $\{1,2,\dots,15\}$. *Что можно сказать о состоянии* i, *если известно, что* j *рекуррентно и* i *и* j *сообщаются?*

2) *Пусть* i *и* j *– два различных состояния однородной цепи Маркова* (X_n) *на* $\{1,2,\dots,6\}$. *Что можно сказать о состоянии* j, *если известно, что состояние* j *достижимо из состояния* i, *но из состояния* j *нельзя попасть в состояние* i*?*

3) *Пусть* i *и* j *– два различных состояния однородной цепи Маркова* (X_n) *на* $\mathbb{N}$. *Что можно сказать о состоянии* i, *если известно, что состояние* j *транзитивно и состояние* j *достижимо из состояния* i *?*