Листок 9

Среднее время возвращения для марковских цепей. Задача о разорении. Случайные блуждания.

При решении задач предполагается использование теоремы о связи стационарного распределения для марковской цепи со средним временем возвращения/средним числом посещений другого состояния.

1) Шахматная фигура (конь, ладья, король, ферзь, слон) начинает случайное блуждание из угла шахматной доски, с одинаковой вероятностью выбирая любое доступное поле. Каково среднее число шагов, которое сделает фигура, до того как вернется на место старта?
2) Частица совершает случайные блуждания на вершинах трехмерного куба. В единицу времени с вероятностью $1/4$ она остается на месте, с вероятностью $1/4$ перемещается на соседнюю вершину. Пусть $a, b$ — две противоположные вершины куба, частица начинает свой путь из $a$. Найти: 1) среднее время возвращения в $a$, 2) среднее время достижения $b$, 3) среднее число посещений $b$ до возвращения в $a$.

   Указание для пункта 2): пусть $t_a$ — время достижения цели из состояния $a$. Расписать $t_a$ через такие же величины для соседних состояний и решить получившуюся систему уравнений.
3) (Задача о разорении). Вы приходите в казино с $k$\$. За одну партию вы выигрываете 1\$ с вероятностью $p$ или проигрываете 1\$ с вероятностью $q = 1 - p$, $p < 1/2$. Если у вас остается 0\$, вы уходите. Если вы приобретаете $K$\$, где $K > k$ — некоторая фиксированная сумма, вы тоже уходите. Найти 1) вероятность $p(k)$ того, что вы уйдете ни с чем. 2) среднюю продолжительность игры.

   Указание для пункта 1): вывести рекуррентное сооотношение $p(k) = pp(k+1) + qp(k-1)$. Используя граничные условия $p(0) = 1, p(K) = 0$, вывести формулу для $p(k)$.
4) Блоха/пьяница/элементарная частица/... выходит из состояния 0 и совершает случайные блуждания на целых числах $\{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$. При каждом движении происходит на один шаг вправо с вероятностью $p$ или на два шага влево. Пусть $T_n$ — время первого достижения состояния $n$ (допускается значение $+\infty$).

   1) Определим производящую функцию: $\varphi_n(s) = \sum_k s^k P(T_n = k)$. Докажите, что $\varphi_n = (\varphi_1)^n$

   2) Докажите, что $\varphi_1(s) = ps + (1-p)s(\varphi_1(s))^3$

   3) Докажите, что при $p > 2/3$ состояние 1 (пьяница падает в пропасть) будет достигнуто с вероятностью 1

   4) При $p > 2/3$ найдите среднее число шагов, необходимое для достижения 1. Указание: продифференцировать $\varphi_1$ в единице.
5) В двух урнах находятся 4 шара. В каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \cdots$ случайно, равновероятно и независимо от предыстории выбирается один из шаров и с одинаковыми вероятностями $1/2$ он либо остаётся в той же урне, либо перемещается в другую урну. Пусть $\xi_t$ — число шаров в 1-ой урне в момент $t$, $t = 0, 1, 2, \cdots$. Найти предел при $n \to \infty$ доли тех моментов времени, в которые число шаров в первой урне равно утроенному числу шаров во второй урне.