I Курс. Задание по дискретной математике №1

Дата выдачи 21.02.2012 Срок сдачи 13.03.2012

1. Вычислите производящие функции для последовательностей

   а) $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, k^3, \ldots$ б) $n^3, (n+1)^3, (n+2)^3, \ldots, (n+k)^3, \ldots$

   в) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}.$

   В задаче 1б) приемлемым является ответ в виде суммы фиксированного (не зависящего от n) числа слагаемых.

2. Докажите соотношения

   а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{(n-1)}$, б) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{(n+1)}-1}{n+1}$,

   в) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{2^{(n+2)}-n-3}{(n+1)(n+2)}$, г) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \frac{n2^{(n+1)}+1}{(n+1)(n+2)}$.

3. Для последовательности, заданной начальными условиями и рекуррентным соотношением

   а) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 21, \qquad a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad \underline{n > 2\,(!)}\,;$

   б) $a_0 = 3, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 2, \qquad a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{27}a_{n-3}, \quad n > 2\,;$

   найдите производящую функцию и разложите ее в сумму элементарных дробей. Начиная с какого номера n члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

4. Производящая функция последовательности (a_n) имеет вид $\frac{1-s^4}{1-s^3}$. Найдите линейное рекуррентное соотношение наименьшего порядка, которому удовлетворяют ее члены, начиная с некоторого номера n. Начиная с какого номера n члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

5. Пусть последовательность задана как значения квазимногочлена $n^2+(-1)^n$. Напишите для нее производящую функцию. Каков наименьший порядок линейного рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет эта последовательность?

6. Известно, что члены последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяют соотношениям

   а) $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + 1 = a_{n+k}, \quad a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 1;$

   б) $2(na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + 2a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad a_0 = 0;$

   в) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} = a_{n+1}, \quad a_0 = a_1 = 1.$

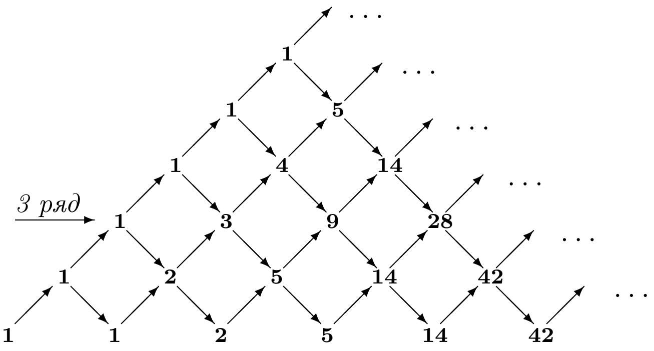

Рис. 1: Треугольник Дика.

Найдите производящую функцию последовательности. В случае, если производящая функция рациональна, выпишите линейные рекуррентные соотношения на ее коэффициенты. В противном случае докажите иррациональность производящей функции.

г) Постройте выражение для членов последовательности б) в виде квазимногочленов. Вычислите $a_{99}, a_{100}, a_{101}, a_{102}$.

7. Найдите производящую функцию для произведения Адамара двух последовательностей $A(s)$ и $B(s)$, заданных начальными условиями и рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \qquad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n > 1\,, \\ b_0 = 1, \quad b_1 = 4, \qquad b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}, \quad n > 1\,. \end{aligned}$$

8. Найдите производящую функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$a)\ \ F'(s) = \frac{1}{\cos(F(s))}, \quad F(0) = 0; \qquad б)\ \ sF'(s) = F(s) + s^2 \exp(F(s)/s), \quad F(0) = 0.$$

Докажите, что функция $F(s)$ из пункта а) не является рациональной.

9. Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих

   а) в третьем снизу горизонтальном ряду (см. Рис.1)

   б) в k-м горизонтальном ряду

   треугольника Дика.

10. Пути Моцкина определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы $(1, 0)$ (см. Рис.2). Число путей Моцкина из n векторов называется n-м числом Моцкина и обозначается m_n: $m_0 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$, $m_4 = 9$ и т. д.

    а) Найдите производящую функцию для последовательности чисел Моцкина.

    Среди всех путей Моцкина выделим подмножество путей, не содержащих горизонтальных векторов в самом нижнем ряду (например, из двух путей, изображенных на Рис.2, путь а) исключается из рассмотрения). Числа таких путей,

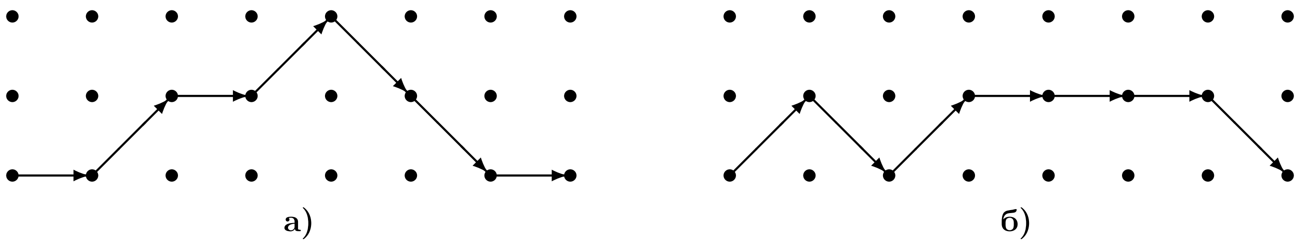

Рис. 2: Пути Моцкина.

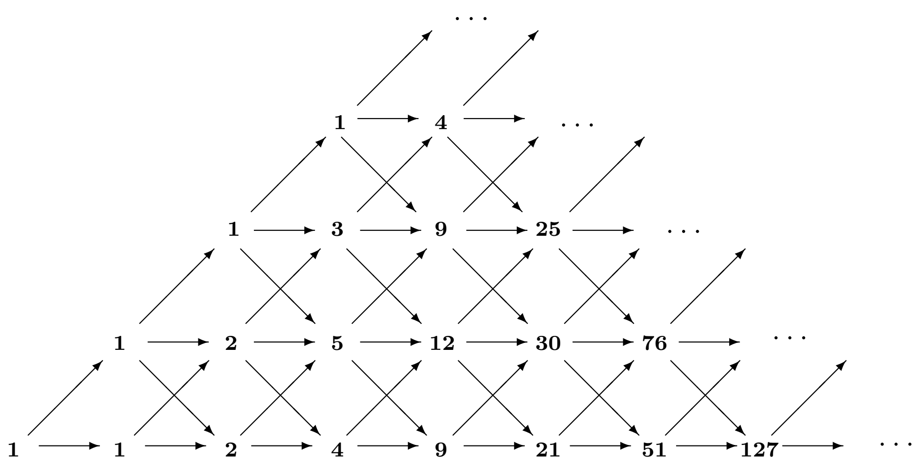

Рис. 3: Треугольник Моцкина.

состоящих из n векторов образуют последовательность μ_n: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 3$, $\mu_5 = 6$ и т. д.

б) Найдите производящую функцию для этой последовательности.

в) Найдите производящую функцию от двух переменных, перечисляющую пути в треугольнике Моцкина (см. Рис.3).

11. Полимино – это область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток. Полимино называется стековым, если нижние горизонтальные отрезки его границы образуют один отрезок (см. рис.4). Найдите число стековых полимино с периметром $2n + 4$.

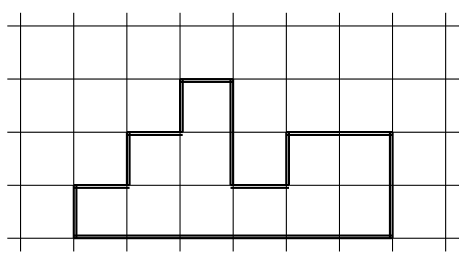

Рис. 4: Стековое полимино.

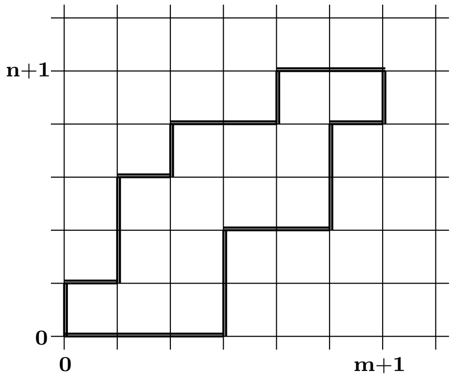

Рис. 5: Параллелограммное полимино.

12. а) На клетчатой плоскости нарисуем всевозможные пары ломаных, стартующие в начале координат и идущие по сторонам клеток вправо и вверх в точку с координатами $(m+1, n+1)$. Найдите число пар таких ломаных, которые имеют общими точками лишь начало $(0,0)$ и конец $(m+1, n+1)$, то есть не пересекаются и не соприкасаются по пути. Такие пары ломаных ограничивают параллелограммные полимино с фиксированными левым нижним – $(0,0)$ – и правым верхним – $(m+1, n+1)$ – углами (см. Рис.5).

    б)* На клетчатой плоскости рисуются всевозможные наборы из n не пересекающихся и не соприкасающихся друг с другом ломаных (таких же как в пункте а)), стартующих в точках с координатами $(0,0)$, $(-1,1)$, $(-2,2)$, $\ldots$,$(1-n, n-1)$ и заканчивающихся в точках с координатами (k,ℓ), $(k-1,\ell+1)$, $(k-2,\ell+2)$, $\ldots$,$(k+1-n, \ell+n-1)$. Постройте выражение для числа таких наборов.

13*. Найдите функцию $F(t)$, бесконечно дифференцируемую на вещественной прямой, ряд Тейлора которой в нуле имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, t^n\,.$$