Глава 10

Точки Вейерштрасса

На кривых рода $g \geq 2$ точки отличаются друг от друга. Например, каждый нетривиальный автоморфизм такой кривой имеет конечное множество неподвижных точек, и множество точек, которые могут быть неподвижными точками какого-либо нетривиального автоморфизма, также конечно. В этой главе мы обсудим еще один способ выделять точки, обладающие специальными свойствами. Этот способ, принадлежащий Вейерштрассу, также выделяет на всякой кривой конечное множество специальных точек. Это множество тесно связано с множеством неподвижных точек нетривиальных автоморфизмов, но, вообще говоря, не совпадает с ним. В частности, точки Вейерштрасса на кривой существуют, даже если у нее нет нетривиальных автоморфизмов.

Как мы уже видели, на всякой гиперэллиптической кривой есть конечное множество точек, которые могут служить полюсами второго порядка для функций, не имеющих других полюсов. Определение точек Вейерштрасса основано на обобщении этого наблюдения.

10.1 Определение точек Вейерштрасса

Как мы увидим ниже, группа автоморфизмов кривой рода $g \geq 2$ конечна, поэтому, в отличие от случая малого рода, две случайно взятые точки такой кривой, как правило, не эквивалентны между собой: не существует изоморфизма кривой, переводящего первую точку во вторую. Обсудим, какие числовые характеристики можно сопоставить точке x комплексной кривой C.

Для натурального числа k посмотрим на размерность $l(k \cdot x)$ пространства мероморфных функций с полюсом порядка не выше k в точке x, не имеющих других полюсов. Эта размерность связана с размерностью $i(k \cdot x)$ пространства голоморфных 1-форм с нулем не ниже k-го порядка в точке x формулой Римана–Роха

$$l(k \cdot x) = k - g + i(k \cdot x) + 1.$$

При $k \geq 2g - 1$ значение $i(k \cdot x)$ равно нулю, поскольку ненулевая голоморфная 1-форма не может иметь нулей порядка выше $2g-2$. Поэтому при таких k имеем $l(k \cdot x) = k - g + 1$ для любой точки x. Тем самым, точки кривой не различаются значением $l(k \cdot x)$ при $k \geq 2g - 1$. Ситуация, однако, разительно меняется, если мы будем смотреть на функцию $l(k \cdot x)$ при $k \leq 2g - 2$.

Как мы знаем, $l(x) = 1$ для любой точки x кривой C положительного рода. С другой стороны, на кривой рода $g \geq 2$ точка x, для которой $l(2 \cdot x) = 2$, существует в том и только в том случае, если эта кривая гиперэллиптическая.

Упражнение 10.1.1. Докажите, что на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ точек x, для которых $l(2 \cdot x) = 2$, по крайней мере $2g + 2$.

Упражнение 10.1.2. Докажите, что на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ точки x, для которых $l(2 \cdot x) = 2$, являются неподвижными точками гиперэллиптической инволюции.

Свяжем с каждой точкой x комплексной кривой C неубывающую последовательность натуральных чисел $l(x), l(2 \cdot x), l(3 \cdot x), \dots, l(k \cdot x), \dots$. При $g > 0$ эта последовательность начинается с 1, и начиная с $k = 2g - 1$ она совпадает с линейной последовательностью $k - g + 1$.

Значение $l(k \cdot x)$ может либо совпадать со значением $l((k-1) \cdot x)$, либо быть больше последнего на 1. Второй случай реализуется, если на кривой существует мероморфная функция с полюсом порядка в точности k в точке x, не имеющая других полюсов. Поскольку первый элемент последовательности равен 1, а элемент с номером $2g-1$ равен g, среди первых $2g-1$ ее элементов есть в точности g, на которых скачка не происходит. Рассмотрим последовательность $a_1, \dots, a_g$ из этих g номеров, $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_g \leq 2g - 1$. Они называются ***лакунами*** точки x.

Пример 10.1.3. Найдем, например, последовательность лакун в точке x на гиперэллиптической кривой, в которой $l(2 \cdot x) = 2$. Поскольку на кривой существует мероморфная функция с полюсом второго порядка в точке x, на ней существуют и функции с полюсами порядков $4, 6, 8, \dots$ — в качестве таковых можно взять квадрат, куб, четвертую степень и т.д. функции с полюсом второго порядка. Тем самым, все четные значения k не являются лакунами. Это означает, что значения $1, 3, 5, \dots, 2g-1$ являются лакунами: в противном случае лакун было бы меньше, чем g. Поэтому все множество нелакун представляет собой объединение множества четных чисел от 2 до $2g - 2$ и множества всех натуральных чисел, начиная с $2g$.

Упражнение 10.1.4. Докажите, что множество *нелакун* в любой точке (т.е. таких натуральных чисел k, что существует мероморфная функция с полюсом в точности k-го порядка в точке x), образует полугруппу: вместе с любыми двумя элементами k_1, k_2 оно содержит их сумму $k_1 + k_2$.

Задача Гурвица о независимом описании всех полугрупп, которые могут встречаться в качестве полугруппы нелакун точки Вейерштрасса, до сих пор не решена полностью.

Упражнение 10.1.5. Выведите из предыдущего упражнения *теорему Клиффорда*: если кривая C негиперэллиптическая, то для любой точки $x \in C$ имеет место неравенство $l(kx) < \frac{k}{2} + 1$ при $k = 1, \dots, 2g - 1$.

В общей точке кривой C имеем $a_i = i$, при $i = 1, \dots, g$, т.е. подскоки начинаются с $(g+1)$-го элемента. Если это не так, т.е. $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого $k \leq g$, то точка x называется *точкой Вейерштрасса*. Эквивалентное определение точки Вейерштрасса состоит в том, что $l(g \cdot x) \geq 2$, т.е. на C существует функция с единственным полюсом в точке x, порядок которого не превосходит g. Точка, в которой лакуны имеют вид

$$1, 2, 3, \dots, g - 1, g + 1,$$

называется *нормальной* точкой Вейерштрасса.

Ниже мы покажем, что точки Вейерштрасса существуют на любой кривой рода $g \geq 2$.

10.2 Точки Вейерштрасса кривых рода 3 и точки перегиба плоских квартик

Пусть C — гладкая плоская квартика, т.е. кривая степени 4 на проективной плоскости. Как мы знаем, род квартики равен $3 \cdot 2/2 = 3$. Согласно теореме Римана-Роха, для любой точки квартики существует функция с полюсом порядка 4 в этой точке.

Пусть теперь $A \in C$ — простая точка перегиба этой кривой (см. параграф 2.3). Касательная к C в точке A трансверсально пересекает кривую C еще в одной точке, точке B. Поэтому проекция кривой C из точки B является разветвленным накрытием степени 3 проективной прямой, причем одна из точек образа (а именно, отвечающая прямой AB) имеет единственный прообраз. Выбрав координату в проективной прямой, образованной прямыми, проходящими через точку B, так, что прямая AB имеет координату ∞, мы получаем мероморфную функцию степени 3 на кривой C, имеющую полюс 3-го порядка в точке A. Это означает, что точка A является точкой Вейерштрасса кривой C.

На общей гладкой квартике имеется $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ простых точек перегиба, и каждая из них является точкой Вейерштрасса. Точки перегиба необщих квартик необязательно просты.

Гладкие плоские квартики это канонические кривые рода 3. Точки Вейерштрасса кривых более высоких родов являются обобщениями точек перегиба канонических кривых.

Упражнение 10.2.1. Вычислите лакуны в простой точке перегиба плоской квартики.

10.3 Веса точек Вейерштрасса

Зафиксируем на кривой C базис из голоморфных 1-форм и некоторую координату z в окрестности точки x. Пусть базисные 1-формы в этой координате записываются в виде $\varphi_1(z)dz, \dots, \varphi_g(z)dz$. Назовем *весом* точки x порядок нуля в ней функции

$$W(z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \dots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \dots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{vmatrix},$$

называемой *вронскианом* системы функций $\phi_1(z), \dots, \phi_g(z)$ (а матрица, стоящая под знаком определителя, называется *матрицей Вронского*). Поскольку любой базис в пространстве голоморфных дифференциалов на кривой линейно выражается через любой другой базис и это выражение распространяется на производные любого порядка функций $\phi_i(z)$, порядок нуля вронскиана в точке не зависит от выбора базиса в этом пространстве.

Утверждение 10.3.1. *Точка x кривой C рода $g \geq 2$ является точкой Вейерштрасса в том и только в том случае, если ее вес больше нуля, т.е. если вронскиан базиса голоморфных 1-форм обращается в x в нуль.*

Доказательство. Для удобства изменим выбранный базис в пространстве голоморфных 1-форм следующим образом (элементы нового базиса будем обозначать теми же буквами). В качестве первого элемента базиса возьмем голоморфную 1-форму ω_1, значение которой в точке x отлично от нуля (как мы знаем, все голоморфные 1-формы не могут обращаться в нуль одновременно, поэтому такая 1-форма существует). Пространство $\Omega^1(C)$ голоморфных 1-форм на C раскладывается в прямую сумму 1-форм, пропорциональных ω_1, и $(g-1)$-мерного подпространства 1-форм, обращающихся в нуль в точке x.

Пусть теперь b_2 — минимальный порядок нуля в точке x у 1-форм, лежащих в этом подпространстве. Выберем 1-форму ω_2, порядок нуля которой в точности равен b_2. Представим пространство $\Omega^1(C)$ в виде прямой суммы плоскости, натянутой на 1-формы ω_1 и ω_2, и $(g-2)$-мерного подпространства, состоящего из голоморфных 1-форм, порядок нуля которых строго больше b_2. В качестве 1-формы ω_3 выберем произвольную 1-форму из этого подпространства, имеющую минимально возможный порядок нуля b_3.

Последующие порядки нулей b_i определяются и 1-формы ω_i выбираются аналогичным образом. В результате мы получаем последовательность натуральных чисел $b_g > b_{g-1} > \dots > b_2 > b_1 = 0$ и базис $\omega_1, \dots, \omega_g$ в пространстве голоморфных 1-форм, такой, что порядок нуля 1-формы ω_i в точке x равен b_i, $i = 1, 2, \dots, g$. Матрица Вронского в точке x в этом базисе оказывается верхнетреугольной, поскольку $b_i \geq i-1$ для всех i. Более того, эта матрица ступенчатая, причем высота каждой ненулевой ступеньки в ней равна 1. Вронскиан же отличен от нуля в том и только в том случае, если для всех $i = 2, \dots, g$ выполняется равенство $b_i = i - 1$. Действительно, только в этом случае все элементы на диагонали верхнетреугольной матрицы Вронского ненулевые.

С другой стороны, мероморфная функция с единственным полюсом порядка g в точке x на кривой C существует в том и только в том случае, если для некоторой ненулевой главной части

$$f(z) = \frac{c_{-g}}{z^g} + \frac{c_{-g+1}}{z^{g-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z}$$

выполняется условие $\mathrm{Res}_{z=0}\, f\omega_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, g$. Если $b_g = g - 1$, т.е. $b_i = i - 1$ для всех i, то условие $\mathrm{Res}_{z=0}\, f\omega_g = 0$ является линейным условием на коэффициент c_{-g}, из которого вытекает, что этот коэффициент равен нулю. Тогда из условия $\mathrm{Res}_{z=0}\, f\omega_{g-1} = 0$ вытекает, что и коэффициент c_{-g+1} равен нулю. Рассуждая последовательно, мы приходим к выводу, что все коэффициенты главной части f, а значит и сама эта главная часть, равны нулю.

Если же $b_g > g - 1$, то уравнение $\mathrm{Res}_{z=0}\, f\omega_g = 0$ выполняется автоматически, а система уравнений $\mathrm{Res}_{z=0}\, f\omega_i = 0$, $i = 1, \dots, g - 1$, является системой из $g - 1$ однородных линейных уравнений на g неизвестных коэффициентов $c_{-1}, \dots, c_{-g}$ и имеет, следовательно, нетривиальное решение.

□

Обращение вронскиана в нуль в некоторой точке $x \in C$ означает, что в этой точке каноническая кривая "инфинитезимально уплощается" — аналогично тому, как это происходит в точках перегиба плоской квартики.

Следствие 10.3.2. *Сумма весов всех точек Вейерштрасса на кривой рода g равна $(g-1)g(g+1)$.*

Доказательство. Порядок нуля определителя, стоящего в определении веса точки Вейерштрасса, не зависит от выбора локальной координаты в окрестности точки. Поэтому для подсчета суммарного веса всех точек Вейерштрасса достаточно подсчитать сумму порядков нулей вронскиана. Всякая 1-форма ω есть сечение кокасательного расслоения. Ее производная есть не что иное как сечение тензорного квадрата этого расслоения. Если в локальной координате z 1-форма ω имеет вид $\omega = \varphi(z)dz$, то ее производная это $\varphi'(z)(dz)^2$. Аналогично, i-я производная это $\varphi^{(i)}(z)(dz)^{i+1}$.

Тем самым, нули вронскиана это нули сечения тензорного произведения первой, второй, ..., g-ой тензорных степеней кокасательного расслоения. Дивизор нулей такого сечения имеет степень

$$\begin{aligned}&(2g-2) + 2\cdot(2g-2) + 3\cdot(2g-2) + \dots + g\cdot(2g-2)\\ &= (2g-2)(1+2+\dots+g) = (2g-2)\frac{g(g+1)}{2} = (g-1)g(g+1),\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Упражнение 10.3.3. Докажите, что число точек Вейерштрасса на любой кривой конечно.

Пример 10.3.4. На общей плоской квартике мы нашли 24 точки Вейерштрасса. С другой стороны, суммарный вес всех точек Вейерштрасса на кривой рода 3 равен $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Поэтому вес каждой из точек перегиба равен 1, и других точек Вейерштрасса на квартике нет.

В процессе доказательства утверждения о вронскиане мы сопоставили каждой точке кривой возрастающую последовательность неотрицательных целых чисел $0 = b_1 < b_2 < \cdots < b_g$ — минимально возможные порядки нулей базисных 1-форм в этой точке. Эта последовательность и последовательность лакун $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_g$ взаимно-однозначно определяют друг друга. В частности, в точке кривой, не являющейся точкой Вейерштрасса, последовательность чисел b_i имеет вид $0, 1, \ldots, g-1$, а последовательность лакун — вид $1, 2, \ldots, g$. В общем случае эта связь имеет следующий вид.

Утверждение 10.3.5. *Последовательность лакун $a_1, \ldots, a_g$ и последовательность порядков нулей базисных 1-форм $b_1, \ldots, b_g$ следующим образом выражаются друг через друга:*

$$\begin{aligned}
a_g &= g + \sum_{i=1}^{g}(b_i - i + 1);\\
a_{g-1} &= (g-1) + \sum_{i=1}^{g-1}(b_i - i + 1);\\
\ldots &= \ldots\\
a_2 &= 2 + (b_2 - 1 + 1);\\
a_1 &= 1.
\end{aligned}$$

Доказательство вытекает из соображений двойственности — если разность $b_{i+1} - b_i$ превосходит 1, то условие на вычет $\mathrm{Res}_{z=0} f\omega = 0$ не накладывает дополнительных ограничений на коэффициенты главной части f, и размерность пространства решений увеличивается на 1. Так, $a_2 = 2$ при $b_2 = 1$, т.е., если существует голоморфная 1-форма, равная нулю в точке x, производная которой в этой точке отлична от нуля, и $a_2 = 3$, если $b_2 = 2$. Последующие значения лакун вычисляются аналогичным образом. □

Следствие 10.3.6. *Вес точки Вейерштрасса равен $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$, где $a_1, \ldots, a_g$ — последовательность лакун этой точки.*

В частности, вес нормальной точки Вейерштрасса, т.е. точки с последовательностью лакун $1, 2, \ldots, g-1, g+1$ равен

$$(1-1) + (2-2) + \cdots + ((g-1) - (g-1) + ((g+1) - g) = 1.$$

Тем самым, если все точки Вейештрасса на кривой рода g нормальные, то их количество равно $(g-1)g(g+1)$.

Упражнение 10.3.7. Найдите вес точек Вейерштрасса, для которых $l(2 \cdot x) = 2$, на гиперэллиптических кривых. Воспользовавшись результатом, убедитесь в том, что других точек Вейерштрасса на гиперэллиптических кривых нет. Докажите, что для кривых данного рода эти точки имеют максимально возможный вес.

Упражнение 10.3.8. Проверьте, что кривая Ферма $x^4 + y^4 = 1$ имеет 12 точек “двойного” перегиба, каждая из которых является точкой Вейерштрасса веса 2.

Упражнение 10.3.9. Найдите число точек Вейерштрасса на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$.

Упражнение 10.3.10. Докажите, что на негиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ есть по крайней мере $2g + 6$ точек Вейерштрасса.

Наше обсуждение позволяет сделать некоторые выводы об эквивалентности точек на кривых:

- никакая точка кривой, не являющаяся точкой Вейерштрасса, не экивалентна никакой точке Вейерштрасса;
- если две точки Вейерштрасса эквивалентны между собой, то у них одинаковые последовательности лакун.

Разумеется, этот набор инвариантов линейной эквивалентности точек далеко не полон.

Упражнение 10.3.11. Приведите пример кривой и двух точек Вейерштрасса с совпадающими последовательностями лакун на ней, причем эти точки неэквивалентны друг другу.

10.4 Точки Вейерштрасса и конечность группы автоморфизмов

Всякий автоморфизм кривой рода $g \geq 2$ должен переводить множество точек Вейерштрасса кривой в себя. Воспользовавшись этим фактом, мы можем доказать теперь конечность группы автоморфизмов кривой. Для этого достаточно показать, что конечна группа автоморфизмов кривой, оставляющих все точки Вейерштрасса неподвижными.

Лемма 10.4.1. *Нетривиальный автоморфизм кривой рода $g \geq 2$ не может иметь больше $2g + 2$ неподвижных точек.*

Доказательство. Пусть автоморфизм η кривой имеет s неподвижных точек. Пусть D — дивизор, состоящий из $g + 1$ различных точек, никакая из которых не является неподвижной точкой автоморфизма η. Применение теоремы Римана–Роха к этому дивизору

$$l(D) - l(K - D) = (g + 1) - g + 1 = 2$$

показывает, что существует непостоянная функция f с полюсами первого порядка в точках дивизора D (хотя, быть может, не во всех этих точках).

Функция $f - f \circ \eta$ непостоянна и имеет не более, чем $2g+2$ полюсов первого порядка и по крайней мере s нулей (каждая неподвижная точка автоморфизма η является нулем этой функции). Поэтому $s \leq 2(g+1)$. □

Следствие 10.4.2. *Группа автоморфизмов кривой рода $g \geq 2$ конечна.*

Доказательство. Вес точки Вейерштрасса x, для которой $l(2 \cdot x) = 2$, равен $\frac{g(g-1)}{2}$, и это максимально возможный вес точки Вейерштрасса. Поэтому на кривой рода $g \geq 2$ имеется не менее $2(g+1)$ точек Вейерштрасса, причем такое количество точек достигается лишь в случае гиперэллиптической кривой. Если кривая негиперэллиптическая, то количество точек Вейерштрасса на ней превосходит $2(g+1)$, значит группа автоморфизмов, сохраняющих эти точки, тривиальна, а значит группа всех автоморфизмов кривой конечна.

Если же кривая гиперэллиптическая, то единственным ее нетривиальным автоморфизмом, сохраняющим все точки Вейерштрасса, является гиперэллиптическая инволюция. Действительно, пусть $f : C \to \mathbb{CP}^1$ — гиперэллиптическое накрытие, $\eta : C \to C$ — автоморфизм кривой C, сохраняющий точки Вейерштрасса, т.е. точки ветвления отображения f. Тогда функция $f \circ \eta : C \to \mathbb{CP}^1$ имеет те же критические значения, что и f, а значит совпадает либо с f, либо с результатом применения к f гиперэллиптической инволюции.

□

Упражнение 10.4.3. Докажите лемму Шенберга (Schoeneberg): если число неподвижных точек нетривиального автоморфизма кривой рода $g \geq 2$ больше 4, то эти неподвижные точки являются точками Вейерштрасса.