"Спецфункции". Лекция. 8

Ряд Стирлинга

1. В отличие от $\Gamma(z)$ ее логарифм допускает асимптотическое разложение, в котором все коэффициенты известны и могут быть объяснены. Выведем это разложение, воспользоваавшись упомянутыми ранее свойствами преобразования Меллина:

а) если $\check{\varphi}(s)$ - преобразование Меллина функции $\varphi(t)$, то преобразование Меллина $\check{f}(s)$ функции $f(t)=\sum_{n\geq 1}\varphi(nt)$ есть $\check{f}(s)=\zeta(s)\check{\varphi}(s)$:

$$\check{f}(s)=\int_0^\infty\sum_{n\geq 1}\varphi(n\tau)\tau^s\frac{d\tau}{\tau}=\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty\varphi(n\tau)\frac{(n\tau)^s}{n^s}\frac{dn\tau}{n\tau}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}\int_0^\infty\varphi(\tau)\tau^s\frac{d\tau}{\tau}=\zeta(s)\check{\varphi}(s).$$

Аналогично, преобразование Меллина $\check{g}(s)$ функции $g(t)=\sum_{n\geq 1}\varphi(\frac{t}{n})$ есть $\zeta(-s)\check{\varphi}(s)$:

$$\check{g}(s)=\int_0^\infty\sum_{n\geq 1}\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\tau^s\frac{d\tau}{\tau}=\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty\varphi(\tau/n)\frac{(\tau/n)^s}{(n)^{-s}}\frac{d\tau/n}{\tau/n}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{-s}}\int_0^\infty\varphi(\tau)\tau^s\frac{d\tau}{\tau}=\zeta(-s)\check{\varphi}(s)$$

б) асимптотическое разложение в нуле функции $\varphi(t)$ переходит в полюсную часть (сумму простейших дробей) аналитического продолжения функции $\check{\varphi}(s)$, а именно:

предположим, что интеграл $\int_1^\infty\varphi(t)t^s dt$ сходится для любого s и

$$\varphi(t)=a_m t^m+a_{m+1}t^{m+1}+\cdots+a_n t^n+O(t^{n+1}),\qquad t\to 0,\quad m<n.$$

Тогда преобразование Меллина $\check{\varphi}(s)$ аналитично в полосе $\operatorname{Re}s>-m$ и разность

$$\check{\varphi}(s)-\left(\frac{a_m}{s+m}+\cdots\frac{a_n}{s+n}\right)$$

аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re}s>-(n+1)$. Напомним доказательство. Представляем $\check{\varphi}(s)$ в виде суммы двух интегралов: $\check{\varphi}(s)=\int_0^1\varphi(t)t^{s-1}dt+\int_1^\infty\varphi(t)t^{s-1}dt$. По условию, второй интеграл аналитически зависит от параметра s. Из условия также следует, что $\varphi(t)=O(t^m)$, поэтому первый интеграл аналитичен при $\operatorname{Re}s>-m$ (значит, и вся сумма). Далее, при $\operatorname{Re}s>-m$

$$\int_0^1\varphi(t)t^{s-1}dt=\int_0^1\left(\varphi(t)-\sum_{k=m}^n a_k t^k\right)t^{s-1}dt+\sum_{k=m}^n\int_0^1 a_k t^{k+s-1}dt=$$
$$\int_0^1\left(\varphi(t)-\sum_{k=m}^n a_k t^k\right)t^{s-1}dt+\sum_{k=m}^n\frac{a_k}{s+k}.$$

Подинтегральное выражение в первом интеграле есть $O(t^{s+n})$ при $t\to 0$, поэтому он аналитичен в полуплоскости $\operatorname{Re}s>-(n+1)$.

<u>Вопрос 1</u>. Каким должно быть асимптотическое разложение $\varphi(t)$ в нуле, чтобы в полюсной части аналитического продолжения $\check{\varphi}(s)$ появились слагаемые $\dfrac{1}{(s+m)^2}$? Ответ подсказывает следующий интеграл ($\operatorname{Re}s>-m$):

$$\int_0^1 t^{m+s-1}\log t dt=\int_0^1\frac{d(t^{m+s})}{m+s}\log t=\frac{t^{m+s}\log t}{m+s}\Big|_{t=0}^1-\frac{1}{m+s}\int_0^1 t^{m+s-1}dt=$$
$$-\frac{1}{(m+s)^2}t^{m+s}\Big|_{t=0}^1=-\frac{1}{(m+s)^2}.$$

Повторяя привычную схему, получаем следующее утверждение. Предположим, что интеграл $\int_1^\infty \varphi(t)t^s dt$ сходится для любого s и

$$\varphi(t) = \sum_{k=m}^{n} \left(a_k t^k + b_k t^k \log t\right) + O(t^{n+1}), \qquad t \to 0, \quad m < n.$$

Тогда преобразование Меллина $\check{\varphi}(s)$ аналитично в полосе $\operatorname{Re} s > -m$ и разность

$$\check{\varphi}(s) - \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{a_k}{s+k} - \frac{b_k}{(s+k)^2} \right)$$

аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} s > -(n+1)$. Таким образом, речь идет о разложении в нуле по асимптотической последовательности $f_1(t), f_2(t), \ldots$, где

$$f_1(t) = t^m \log t,\ f_2 = t^m,\ f_3 = t^{m-1} \log t,\ f_4 = t^{m-1}, \ldots$$

каждый последующий член которй есть o малое от предыдущего.

Вопрос 2. Во что переходит асимптотическое разложение $\varphi(t)$ в бесконечности? Преобразуем интеграл

$$\check{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(t) t^s \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) \tau^{-s} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Замена $t \to \frac{1}{t}$ переводит асимптотическое разложение $\varphi(t)$ в нуле в асимптотическое разложение в бесконечности (с заменой знака у логарифма); в преобразовании Меллина при этом происходит замена s на $-s$. Более точно.

Предположим, что интеграл $\int_0^1 \varphi(t)t^s dt$ сходится для любого s и

$$\varphi(t) = \sum_{k=m}^{n} \left(a_k t^{-k} + b_k t^{-k} \log t\right) + O(t^{-(n+1)}), \qquad t \to 0, \quad m < n.$$

Тогда преобразование Меллина $\check{\varphi}(s)$ аналитично в полосе $\operatorname{Re} s < m$ и сумма

$$\check{\varphi}(s) + \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{a_k}{s-k} - \frac{b_k}{(s-k)^2} \right)$$

аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} s < n+1$.

2. Схема нахождения асимптотики $\log \Gamma(z)$ состоит в следующем:

1. представляем $\log \Gamma(z)$ в виде $\sum_{n=1}^\infty \varphi(z/n)$ для некоторой функции $\varphi(z)$.
2. находим асимптотическое разложение $\varphi(z)$ в бесконечности
3. пользуясь свойствами преобразования Меллина, находим особенности $\zeta(-s)\check{\varphi}(s)$ и, как следствие, коэффициенты асимпттического разложения $\log \Gamma(z)$.

Воспользуемся представлением Вейерштрасса:

$$\Gamma(z) = z^{-1} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}, \quad z \neq 0, -1, ...$$

где γ- постоянная Эйлера. Из него следует сходящееся в секторе $-\pi < \arg z < \pi$ разложение

$$\log \Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$\log \Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n\geq 1} \varphi\left(\frac{z}{n}\right),$$

где $\varphi(z) = z - \log(1+z)$. Функция $\varphi(t)$ при больших t ведет себя как t, а при малых как $t^2/2$, как следует из разложения в ряд $\log(1+t)$. Значит, интеграл

$$\check{\varphi}(s) = \int_0^\infty (t - \log(1+t)) t^{s-1} dt$$

сходится на бесконечности при $\operatorname{Re} s < -1$ и сходится в нуле при $\operatorname{Re} s > -2$, так что преобразование Меллина $\check{\varphi}(s)$ определено и аналитично в полосе $-2 < \operatorname{Re} s < -1$. Найдем асимптотические разложения $\varphi(t)$ в нуле и бесконечности.

а) При $t \to 0$ имеем сходящийся ряд Тэйлора:

$$\varphi(t) = t - \log(1+t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n t^n}{n} + \cdots$$

б) При $t \to \infty$

$$\varphi(t) = t - \log(1+t) = t - \log t - \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) = t - \log t - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{nt^n} + \cdots.$$

Таким образом, в полосе $-(m+1) < \operatorname{Re} s < n+1$

$$\check{\varphi}(s) = \left(\frac{(-1)^m}{m(s+m)} + \dots - \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{2(s+2)} \right) - \\ \left(\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2(s-2)} + \dots + \frac{(-1)^n}{n(s-n)} \right) + \text{аналитич. функция.}$$

Поскольку единственная особенность функции $\zeta(s)$ - полюс первого порядка с единичным вычетом в $s = 1$, произведение $\zeta(-s)\check{\varphi}(s)$ в полосе $-(m+1) < \operatorname{Re} s < n+1$ может быть представлено в виде

$$\zeta(-s)\check{\varphi}(s) = \left(\frac{(-1)^m \zeta(m)}{m(s+m)} + \dots - \frac{\zeta(3)}{3(s+3)} + \frac{\zeta(2)}{2(s+2)} \right) - \\ - \left[\left(\frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{X}{(s+1)} \right) + \left(\frac{\zeta(0)}{s^2} + \frac{Y}{s} \right) - \frac{\zeta(-1)}{s-1} + \frac{\zeta(-2)}{2(s-2)} + \dots + \frac{(-1)^n \zeta(-n)}{n(s-n)} \right] + \\ + \text{аналитическая функция.}$$

Здесь X и Y - два числа, которые нужно найти из дополнительных соображений. Нетрудно понять, что $Y = -\zeta'(0) = \frac{1}{2}\log 2\pi$. Действительно, в окрестности $s = 0$ имеем

$$\zeta(-s)\check{\varphi}(s) = \left(\zeta(0) - \zeta'(0)s + O(s^2)\right) \left(\frac{1}{s^2} + O(1) \right) = \frac{\zeta(0)}{s^2} - \frac{\zeta'(0)}{s} + O(1).$$

Вычисление коэффициента X требует более точного знания поведения $\check{\varphi}(s)$ в окрестности $s=-1$. Оно определяется процедурой аналитического продолжения $\check{\varphi}(s)$ из области $-2 < \operatorname{Re} s < -1$ через особенность в $s=-1$:

$$\check{\varphi}(s)=\int_0^1 (t-\log t)t^{s-1}dt+\int_1^\infty (t-\log t)t^{s-1}dt=\int_0^1 (t-\log t)t^{s-1}dt+$$
$$+\int_1^\infty t^s dt-\int_1^\infty t^{s-1}\log t dt=-\frac{1}{s+1}+\int_0^1 (t-\log t)t^{s-1}dt-\int_1^\infty \log(1+t)t^{s-1}dt.$$

Оба получившишся интеграла имеют конечный предел при $s\to -1$. Вычислим эти пределы (подставив $s=-1$):

$$\text{а)}\quad \int_0^1 \frac{t-\log(1+t)}{t^2}dt=\int_0^1 \left(t-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\cdots\right)\frac{dt}{t^2}=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{4}+\cdots+\right)dt=$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots=1-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...\right)=$$
$$2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...\right)-1=2\log 2-1.$$

Во втором интеграле сделаем замену переменных $t\to\tau^{-1}$:

$$\text{б)}\quad \int_1^\infty \log(1+t)\frac{dt}{t^2}=\int_0^1 \log\left(1+\frac{1}{\tau}\right)d\tau=\int_0^1 (\log(1+\tau)-\log\tau)\,d\tau=$$
$$((\tau+1)\log(\tau+1)-\tau\log\tau+1)\,|_0^1=2\log 2.$$

Вычитая, получим:

$$\check{\varphi}(s)=-\left(\frac{1}{s+1}+1\right)+O(s+1),\qquad s\to -1.$$

Используя известное разложенеи $\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1)$, получаем

$$\zeta(-s)\check{\varphi}(s)=-\left(\frac{1}{s+1}+1+O(s+1)\right)\left(\frac{1}{-s-1}+\gamma+O(s+1)\right)=$$
$$-\left(\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{\gamma-1}{s+1}\right)+O(1),\qquad s\to -1.$$

Таким образом, коэффициент X равен $\gamma-1$, где γ- постоянная Эйлера и

$$\zeta(-s)\check{\varphi}(s)=\left(\frac{(-1)^m\zeta(m)}{m(s+m)}+\cdots-\frac{\zeta(3)}{3(s+3)}+\frac{\zeta(2)}{2(s+2)}\right)-$$
$$-\left[\left(\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{\gamma-1}{(s+1)}\right)+\left(\frac{\zeta(0)}{s^2}-\frac{\zeta'(0)}{s}\right)-\frac{\zeta(-1)}{s-1}+\frac{\zeta(-2)}{2(s-2)}+\cdots+\frac{(-1)^n\zeta(-n)}{n(s-n)}\right]+$$
$$+\text{аналитическая в полосе } -(m+1)<\operatorname{Re} s<(n+1) \text{ функция}.$$

Если предположить , что $\log\Gamma(z)$ имеет асимптотические разложения в нкле и бесконечности, то первая строка последней формулы определяет коэффициенты асимптотического разложения в нуле, а вторая - в бесконечности. Нетрудно понять, что в нуле имеется даже сходящееся разложение,

$$\log\Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} z^n, \qquad z \to 0,$$

которое, впрочем, несложно получить и непосредственно. Вторая строка выдает коэффициенты разложения в бесконечности,

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) =& -\gamma z - \log z + z\log z + (\gamma-1)z + \frac{1}{2}\log z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\zeta(-k)(-1)^k}{kz^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\\ &= \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{m=1}^{n}\frac{B_{2m}}{2m(2m-1)z^{2m-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),\end{aligned}$$

где B_k - числа Бернулли, ибо $\zeta(-2n) = 0$ и $\zeta(-2n+1) = -\dfrac{B_{2n}}{2n}$. Обозревая вывод коэффициентов разложения, мы видим, что их составляющие - коэффициенты разложения функции $t - \log(1+t)$ в бесконечности и значения и производные ζ-функции Римана. Отметим также, что экспоненциировать полученное разложение для получения разложения $\Gamma(z)$ нельзя - это запрещенная операция с асимптотическими рядами по асимптотической последовательности, часть членов которй асимптотически стремятся к бесконечности, а часть - к нулю. Тем не менее экспонента от иррегулярной части дает правильное выражение для иррегулярной части асимптотического разложения $\Gamma(z)$ в бесконечности.

3. Обзор строгого вывода. Его можно получить, вычислив точно преобразование Меллина функции $\varphi(t) = t - \log(1+t)$, и воспользовавшись затем формулой обращения преобразования Меллина. По определению,

$$\check{\varphi}(s) = \int_0^\infty (t - \log(1+t)t^{s-1}dt, \qquad -2 < \operatorname{Re} s < -1.$$

Проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}\check{\varphi}(s) = \int_0^\infty (t-\log(1+t))t^{s-1}dt = \int_0^\infty (t-\log(1+t))\frac{d(t^s)}{s} =\\ (t-\log(1+t))\frac{t^s}{s}\Big|_{t=0}^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty\left(1-\frac{1}{t+1}\right)t^s dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{t^{s+1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

(граничные члены обращаются в нуль при $-2 < \operatorname{Re} s < -1$). Интеграл $\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}dt$ уже вычислялся при помощи контурного интеграла Ханкеля (см. лекцию 4):

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin\pi s}, \qquad 0 < \operatorname{Re} s < 1.$$

Это вычисление использовалось для вывода формулы дополнения $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$, поскольку замена $t = \frac{\tau}{1-\tau}$ переводит $\int_0^\infty \frac{t^s}{1+t}dt$ в

$$\int_0^1 \tau^{s-1}(1-\tau)^{-s}d\tau = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

Значит,

$$\check{\varphi}(s) = \int_0^\infty (t - \log(1+t)t^{s-1}dt = -\frac{\pi}{s \sin \pi(s+2)} = -\frac{\pi}{s \sin \pi s}.$$

Функция $\dfrac{\pi}{s \sin \pi s}$, так же, как и $\operatorname{ctg} \pi s$, допускает разложение в ряд Эйзенштейна:

$$\frac{\pi}{s \sin \pi s} = \sum\nolimits_e \frac{(-1)^n}{s+n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{s+k},$$

Поэтому

$$\check{\varphi}(s) = -\frac{\pi}{s \sin \pi s} = -\frac{1}{s} \sum\nolimits_e \frac{(-1)^n}{s+n} = -\frac{1}{s^2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\pm 1}^{\pm n} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{s} \right) =$$

$$-\frac{1}{s^2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\pm 1}^{\pm n} \frac{(-1)^k}{k(s+k)} = -\frac{1}{s^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(s+k)}.$$

Сравнивая это разложение с разложением $\check{\varphi}(s)$ в полосе $-(m+1) < \operatorname{Re} s < (n+1)$, полученное из асимптотического разложения $\varphi(t)$ в нуле и бесконечности, мы видим, что это разложение точное (т.е., представленный им ряд сходится к $\check{\varphi}(s)$)!

Формула обращения преобразования Меллина говорит, что

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \varphi\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\pi}{s \sin \pi s} \zeta(-s) z^s ds,$$

где $-2 < a < 1$. Общая теория гарантирует справедливость формулы обращения только для действительных z. Рассмотрим, однако, асимптотику подинтегрального выражения на границах интервала интегрирования, $s = a + iy$, $y \to \pm\infty$, $-2 < a < -1$.

Функция $\zeta(-s)$ ограничена на указанной прямой, так как $\zeta(s)$ представлена в области $\operatorname{Re} s > 1$ абсолютно сходящимся рядом; $\sin \pi s \sim e^{\pi |y|}$ при больших y, а

$$z^s = e^{s(\log|z| + i \arg z)} = e^{(a+iy)(\log|z| + i\arg z)} \sim e^{y \arg z}.$$

Таким образом, интеграл абсолютно сходится при $-\pi < \arg z < \pi$ и представляет во всем этом конусе (как и следовало ожидать) аналитическую функцию.

Теперь мы будем сдвигать вертикальную прямую интегрирования направо, добавляя по дороге вычеты в точках $s = -1, 0, 1, ...$, которые и будут давать поочередно члены асимптотического разложения.

Более точно, приблизим интересующий нас интеграл интегралом по конечному вертикальному отрезку:

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{s=a-iR}^{a+iR} \frac{\pi}{s \sin \pi s} \zeta(-s) z^s ds.$$

Этот интеграл будет равен интегралу по сдвинутому вертикальному отрезку

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{s=a+n-iR}^{a+n+iR} \frac{\pi}{s \sin \pi s} \zeta(-s) z^s ds$$

плюс два интеграла по горизонтальным отрезкам $s = \pm iR + \sigma$, $a < \sigma < a + n$, минус интеграл по замкнутому прямоугольному контуру, ограниченному двумя вертикальными прямыми (их длина стремится к бесконечности) и двумя горизонтальными отрезками длины n.

Для оценки результатов требуется знание асимптотика $\zeta(s)$ с фиксированной отрицательной действительной частью и увеличивающейся мнимой. Она выглядит так (см. Уитеккер, Ватсон, том 2, $ 3.51, выводится из соотношения Римана):

$$\zeta(a+iy) = O\left(|y|^{\frac{1}{2}-a}\log|y|\right).$$

Пусть теперь z находится в конусе $|\arg z| < \pi - \delta$ для некоторого фиксированного δ. Тогда оценка $\zeta(s)$ вкупе с приведенной выше оценкой подинтегрального выражения гарантируют, во-первых, стремление к нулю при $R \to \infty$ интегралов по горизонтальным отрезкам, во-вторых, конечность интеграла по сдвинутому вертикальному отрезку; в третьих, оценка интеграла по сдвинутому вертикальному отрезку как $O(|z|^{n+a})$. Интеграл по замкнутому прямоугольнику сведется к сумме вычетов по точкам $-1, 0, ..., [n+a]$, равных сумме соответствующих членов асимптотического разложения $\log\Gamma(z)$.

В итоге получается асимптотическая формула Стирлинга, верная в любом конусе $|\arg z| < \pi - \delta$.