Алгебра. Листок 8.

Внимание! Исправлено условие задачи 8.23.

В этом листке S_n обозначает группу перестановок из n элементов, A_n — группу четных перестановок, D_n — группу всех движений плоскости, сохраняющих правильный n-угольник (группа диэдра). Теорема о том, что любая конечная абелева группа изоморфна прямому произведению циклических групп, предполагается известной без доказательства.

Задачи, отмеченные значком **&** , должны сдаваться преподавателю. Студентам, сдавшим к 10.02 не менее двух третей от списка задач с 13 по 29 (считая подпункты), оценка за этот листок выставляется без учета несданных еще задач 1-12.

◇ **8.1. &** *Докажите, что группу G можно представить в виде прямого произведения тогда и только тогда, когда G содержит две такие подгруппы H и K, что:*
1) $H \cap K = \{e\}$ (e — единичный элемент группы G); 2) $\forall h \in H$ и $\forall k \in K \quad h \cdot k = k \cdot h$;
3) $\forall g \in G$ элемент g можно представить в виде $g = h \cdot k$, где $h \in H$ и $k \in K$.

◇ **8.2. &** *Приведите пример подгруппы, не являющейся нормальной.*

◇ **8.3. &** *Докажите, что A_n является нормальной подгруппой в S_n. Каков ее порядок?*

◇ **8.4. &** *Свойства порядка элемента группы. (Сдается один или несколько пунктов по выбору преподавателя.)*
а) $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b^{-1}ab)$. *б) Если $a^m = e$, то $\mathrm{ord}(a) \mid m$.* *в) Если $m \mid \mathrm{ord}(a)$, то $\mathrm{ord}(a^m) = \frac{\mathrm{ord}(a)}{m}$*
г) Если числа m и $\mathrm{ord}(a)$ взаимно просты, то $\mathrm{ord}(a^m) = \mathrm{ord}(a)$. *д) $\forall m$ $\mathrm{ord}(a^m) = \frac{\mathrm{ord}(a)}{\text{НОД}(\mathrm{ord}(a), m)}$.*

◇ **8.5. &** *Рассмотрим мультипликативные группы $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*
$\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R}, \quad x > 0\}$, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$, $\{\pm 1\}$.
а) Докажите, что $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}^*_+ \times \{\pm 1\}$. *б) Докажите, что $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{S}^1$.*

◇ **8.6. &** *Какие из групп $\mathbb{Z}^*_n$, $n \le 15$, циклические, а какие нет? Представьте одну из нециклических групп из этого списка (по выбору преподавателя) как прямое произведение циклических групп.*

◇ **8.7. &** *Перечислите все попарно неизоморфные абелевы группы порядка 36.*

◇ **8.8. &** *Перечислите все (с точностью до изоморфизма) группы порядка а) 4; б) 6; *в) 8.*

◇ **8.9. &** *Рассмотрим четыре матрицы из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Докажите, что множество $Q_8 = \{\pm E, \pm I, \pm J \pm K\}$. является подгруппой в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. найдите порядки всех элементов в Q_8. Докажите, что D_4 и Q_8 не изоморфны. Q_8 называется группой кватернионов.*

◇ **8.10. &** *Перечислите все циклические подгруппы в группе а) S_4; б) S_5.*

◇ **8.11. &** *Представьте цикл $(123 \dots n) \in S_n$ в виде произведения $n-1$ транспозиции.*

◇ **8.12. &** *Докажите, что подгруппа индекса два всегда нормальна.*

◇ **8.13.** *Докажите, что определение группы равносильно следующему: группа это множество с такой ассоциативной операцией, что любое уравнение вида $ax = b$ или $ya = b$ имеет однозначное решение.*

◇ **8.14.** *а) При каких значениях n группы $D_n \times \mathbb{Z}_2$ и D_{2n} изоморфны?*
б) Докажите, что при $m > 2$ группы $D_n \times \mathbb{Z}_m$ и D_{mn} никогда не изоморфны.

◇ **8.15.** *Докажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.*

◇ **8.16.** *Перечислите все нормальные подгруппы в группе D_4. Найдите фактор-группу по одной из них (по указанию преподавателя).*

◇ **8.17.** *Перечислите все нормальные подгруппы в группе а) S_3; б) S_4 в) S_5.*

◇ **8.18.** *Перечислите все подгруппы в группе кватернионов Q_8, укажите, какие из них нормальны, и найдите фактор-группу по одной из них (по указанию преподавателя).*

◇ **8.19.** *Приведите пример двух неизоморфных групп G_1 и G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$, таких что $H_1 \cong H_2$ и $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.*

◇ **8.20.** *Для каждого непростого делителя d числа 24 укажите в S_4 нециклическую подгруппу порядка d. Какие из этих подгрупп нормальны? Для нормальных подгрупп найдите фактор-группы.*

◇ **8.21.** *Докажите, что в группе четных перестановок A_4 нет подгруппы порядка 6.*

◇ **8.22.** *Дано шесть групп: $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7^*$, D_3, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$, S_3, верхнетреугольные матрицы из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$. Какие из них попарно изоморфны?*

◇ **8.23.** *а) Докажите, что если элементы a и b некоторой группы коммутируют (т.е. $ab = ba$), то $\mathrm{ord}(ab)$ является делителем числа $\text{НОК}(\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b)$.*
б) Покажите, что если $ab = ba$ и $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = m$, то $\mathrm{ord}(ab)$ может быть любым делителем числа m.
***в) Покажите, что если a и b не обязательно коммутируют, то $\forall k, l, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k, l, m > 1$, существует такая группа и такие элементы a и b в ней, что $\mathrm{ord}\, a = k$, $\mathrm{ord}\, b = l$, $\mathrm{ord}(ab) = m$.*
**г) Приведите требуемый в предыдущем пункте пример хотя бы для $k = l = 2$.*

◇ **8.24.** *Любая подгруппа конечной группы G нормальна. Верно ли, что группа G абелева?*

◇ **8.25.** *Докажите, что любая группа порядка $2p$, где p — нечетное простое число, либо является циклической, либо группой диэдра.*

◇ **8.26.** *Даны две конечные группы G и H. Очевидно, что если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ группы G и H содержат* **разное** *число элементов порядка k, то эти группы не могут быть изоморфны.*
а) Верно ли, что если $\forall\, k \in \mathbb{N}$ конечные группы G и H содержат **одинаковое** *число элементов порядка k, то эти группы изоморфны?*
б) Верно ли предыдущее утверждение, если известно, что конечные группы G и H абелевы?

◇ **8.27.** *Какие из выписанных в каждом ряду групп попарно изоморфны?*
а) D_8, $D_4 \times \mathbb{Z}_2$, $Q_8 \times \mathbb{Z}_2$; б) S_4, D_{12}, $D_6 \times \mathbb{Z}_2$, $D_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $D_3 \times \mathbb{Z}_4$, $Q_8 \times \mathbb{Z}_3$, $D_4 \times \mathbb{Z}_3$.

◇ **8.28.** *Найдите группы автоморфизмов следующих групп:*
а) $\mathbb{Z}_5$; б) $\mathbb{Z}_8$; в) $\mathbb{Z}_{15}$; г) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; д) D_3; е) D_4; ж) Q_8; з) $\mathbb{Z}_p$, где p простое; и) $\mathbb{Z}_{2^n}$.

◇ **8.29.** *Придумайте некоммутативную группу а) порядка 21; б) порядка 27; в) порядка 12, не изоморфную A_4 и D_6; г) порядка 18, не изоморфную D_9;*