Алгебра. 1 курс. Листок 9.

В этом листке линейные пространства не предполагаются конечномерными, если только явно не указано обратное.

Внимание!. Условия исправлены: удалена задача 9.5.3.

◇ **9.1. &** $\dim V = n$. *Докажите, что* $\dim V^* = n$.

◇ **9.2.** *1) Пусть U — линейное подпространство в конечномерном линейном пространстве V, $\varphi \in U^*$. Докажите, что существует такая линейная функция $\psi \in V^*$, что ограничение ψ на U совпадает с φ.*
2) Докажите то же самое без предположения о конечномерности V.

◇ **9.3. &** *Докажите, что если U и V — подпространства в линейном пространстве W, то* $\operatorname{Ann}(U+V) = \operatorname{Ann} U \cap \operatorname{Ann} V$.

◇ **9.4. &** *Пусть U — линейное подпространство в линейном пространстве V.*
1) Докажите, что $U^* \cong V^*/\operatorname{Ann} U$. *2) Докажите, что $(V/U)^* \cong \operatorname{Ann} U$.*

◇ **9.5. &** *Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_n = \{P(t) \in \mathbb{K}[t], \quad \deg P \leq n\}$ многочленов степени не выше n; пусть $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$.*
1) Зафиксируем $a \in \mathbb{K}$. Докажите, что функции $\varphi_k(P) = P^{(k)}(a)$ (значение k-ой производной в точке a), $k = 0, 1, \ldots, n$ линейны и являются базисом $\mathcal{P}_n^*$. Найдите двойственный базис в $\mathcal{P}_n$.
2) Зафиксируем $n+1$ различную точку $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$. Докажите, что функции $\varphi_k(P) = P(a_k)$ (значение P в точке a_k), $k = 1, \ldots, n+1$ линейны и являются базисом $\mathcal{P}_n^*$. Найдите двойственный базис в $\mathcal{P}_n$.

◇ **9.6.** *Докажите, что линейные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ тогда и только тогда являются базисом n-мерного пространства V^*, когда $\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} \varphi_n = \{0\}$.*

◇ **9.7.** *Докажите, что линейные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ тогда и только тогда линейно независимы, когда $\dim(\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} \varphi_k) = \dim V - k$.*

◇ **9.8.** *Докажите, что если $\varphi, \psi \in V^*$ и $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$, то φ и ψ пропорциональны (т.е. $\varphi = \lambda \psi$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$).*

◇ **9.9.** *1) Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение, $f^* : W^* \to V^*$ — сопряженное отображение, и $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$ — сопряженное к сопряженному. Докажите, что ограничение отображения f^{**} на $V \subset V^{**}$ совпадает с отображением f.*
2) Докажите, что в конечномерном случае $f^{**} = f$.

◇ **9.10. &** *Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение, $e_1, \ldots e_n$ и $g_1, \ldots g_m$ — базисы, сответственно в V и W, $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots \psi_m$ — двойственные базисы, сответственно в V^* и W^*. Как связаны матрицы операторов f и $f^* : W^* \to V^*$, записанные в этих базисах?*

◇ **9.11. &** *Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение линейных пространств. Докажите, что*
1) $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} f) \cong \operatorname{Im} f^*$; *2) $\operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f) \cong \operatorname{Ker} f^*$.*

◇ **9.12.** *Пусть ненулевые векторы $v, w \in V$ не пропорциональны. Докажите, что существует такая ненулевая линейная функция $\varphi \in V^*$, что*
1) $\varphi(v) = 0$; *2) $\varphi(w) \neq 0$;* *3) $\varphi(w) \neq 0$, $\varphi(v) = 0$.*

◇ **9.13.** *1) Докажите, что если $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$, то $\operatorname{Ker} \varphi$ является максимальным линейным подпространством в V, отличным от V.*
2) Докажите, что любое максимальное линейное подпространство в V, отличное от V, является ядром ненулевой линейной функции.

◇ **9.14.** *Пусть f — линейный оператор на линейном пространстве V, которое не предполагается конечномерным. Докажите* **альтернативу Фредгольма:** *либо уравнение $f(x) = b$ имеет решение при любой правой части $b \in V$, либо уравнение $f^*(y) = 0$ имеет нетривиальное решение.*