

Введение в дискретную математику  
С. К. Ландо

24 февраля 2012 г.

Дискретную математику можно определить как науку, изучающую конечные множества. При таком определении она становится всепроникающей — трудно представить себе раздел математики, не связанный с конечными множествами, — и необъятной. Поэтому всякий курс дискретной математики, как начальный, так и более сложный, поневоле ограничивается какими-то аспектами этой науки. Выбор излагаемых аспектов обычно опирается на вкусы автора. В настоящем курсе я следовал своим пристрастиям и исследовательскому опыту. Я также стремился связать курс дискретной математики с другими математическими курсами. Так, изучение производящих функций поддерживает изучение разложений функций в ряд в курсе математического анализа.

Курс разбит на три части. Первые две посвящены перечислительной комбинаторике и графам. В третьей, посвященной конечным автоматам, формальным языкам и грамматикам, дается представление о том, как подходы, описанные в первых двух частях, могут применяться для построения простейших вычислительных моделей. В свою очередь, эти модели дают новые подходы к решению перечислительных задач. В приложениях даются решения задач, сопровождающих каждую главу, и образцы контрольных и экзаменационных работ.

Разумеется, вводный характер изложения сказывается и на содержании каждой из частей. Так, из всего богатства результатов о конечных графах я излагаю лишь начальные сведения об их перечислении и инвариантах. В то же время я стремился к тому, чтобы в изложении присутствовал материал, активно используемый в современных математических исследованиях, например в топологии и статистической физике.

При работе с конечными объектами — конечными множествами, графами, словами и т.д. — ключевую роль играют действующие на них группы, в первую очередь, симметрические группы, или группы перестановок. Любые другие конечные группы являются подгруппами в группах перестановок. Свойства объектов в значительной мере определяются комбинаторикой соответствующих групп, что позволяет этим группам играть связующую роль между частями книги. Оказывается, однако, что несмотря на многолетние усилия по изучению конечных групп, даже в комбинаторике симметрических групп остается много неизведанного, а некоторые вопросы еще и не поставлены.

В основе первой части книги лежат мои “Лекции о производящих функциях” (первое издание вышло в 2002 г. при поддержке РФФИ, в 2007 г. издательство Московского центра непрерывного математического образования выпустило их 4-м изданием, а в 2003 г. в издательстве Американского математического общества вышел их перевод на английский язык). Эти лекции читались первокурсникам Независимого Московского университета. Для курса “Введение в дискретную математику”, который читается на факультете математики Высшей школы экономики во втором семестре первого года обучения, они были существенно переработаны, расширены и

обогащены новыми задачами. Помимо отдельных параграфов в эту часть вошла новая глава про теневое исчисление.

В разные годы вместе со мной этот курс вели Г. Л. Рыбников, А. И. Зыкин и П. Н. Пятов. Многие задачи — в том числе для контрольных и экзаменационных работ — предложены ими, и я им очень благодарен. П. Н. Пятов кроме того написал решения целого ряда задач. Я также благодарен студентам факультета математики ВШЭ, живая реакция которых позволила, я надеюсь, заметно улучшить первоначальные записки лекций.

Некоторые разделы курса рассчитаны на студентов, уровень подготовки которых выше среднего. Сюда относятся, в первую очередь, вопросы, связанные со структурами алгебр Хопфа на пространствах многочленов и пространствах графов. Остальной материал не опирается на эти структуры, и их изучение можно безболезненно опустить.

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Элементы перечислительной комбинаторики</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Элементарные производящие функции</b>	<b>7</b>
1.1	Перестановки и сочетания . . . . .	7
1.2	Бином Ньютона . . . . .	10
1.3	Экспонента . . . . .	11
1.4	Производящие функции и действия над ними . . . . .	13
1.5	Дифференцирование и интегрирование производящих функций	17
1.6	Алгебра и топология формальных степенных рядов . . . . .	20
1.7	Задачи . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Рациональные производящие функции</b>	<b>24</b>
2.1	Геометрическая прогрессия . . . . .	24
2.2	Последовательность Фибоначчи . . . . .	25
2.3	Рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции . . . . .	27
2.4	Неоднородные рекуррентные соотношения . . . . .	30
2.5	Произведение Адамара рациональных производящих функций	31
2.6	Асимптотика коэффициентов рациональных функций . . . . .	33
2.7	Задачи . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Перечисление путей на графах</b>	<b>41</b>
3.1	Пути в графах . . . . .	41
3.2	Пути, перечисляемые рациональными производящими функциями . . . . .	42
3.3	Числа Каталана . . . . .	44
3.4	Задачи . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Производящие функции нескольких переменных</b>	<b>52</b>
4.1	Треугольник Паскаля . . . . .	52
4.2	Экспоненциальные производящие функции . . . . .	54
4.3	Треугольник Дика . . . . .	55
4.4	Треугольник Бернулли–Эйлера и перечисление up-down перестановок . . . . .	56
4.5	Числа Эйлера в треугольнике Дика с кратностями . . . . .	61

4.6	Производящая функция для треугольника Дика с кратностями	62
4.7	Задачи	63
<b>5</b>	<b>Теневое исчисление</b>	<b>66</b>
5.1	Определения и примеры	66
5.2	Применения биномиальных последовательностей	67
5.3	Биномиальные последовательности и сдвиги	68
5.4	Явное построение биномиальных последовательностей	71
5.5	Последовательности Шеффер	73
5.6	Коалгебра многочленов	74
5.7	Задачи	76
<b>6</b>	<b>Разбиения</b>	<b>80</b>
6.1	Разбиения и разложения	80
6.2	Тождество Эйлера	84
6.3	Разбиения множеств в треугольнике Моцкина с кратностями	87
6.4	Задачи	90
<b>7</b>	<b>Производящие функции Дирихле</b>	<b>93</b>
7.1	Принцип включения-исключения	93
7.2	Производящие функции Дирихле и действия над ними	96
7.3	Обращение Мебиуса	98
7.4	Мультипликативные последовательности	100
7.5	Задачи	102
<b>II</b>	<b>Графы, их перечисление и инварианты</b>	<b>104</b>
<b>8</b>	<b>Перечисление деревьев и лесов</b>	<b>105</b>
8.1	Перечисление помеченных деревьев	105
8.2	Леса и многочлены Абеля	113
8.3	Перечисление посаженных лесов	115
8.4	Обращение функции и суммирование по деревьям	116
8.5	Задачи	119
<b>9</b>	<b>Числа Гурвица</b>	<b>121</b>
9.1	Графы и перестановки	121
9.2	Числа Гурвица	123
9.2.1	Простые и общие числа Гурвица	124
9.3	Уравнение транспозиции	127
9.4	Задачи	130
<b>10</b>	<b>Соотношение удаление-стягивание и теорема Татта</b>	<b>131</b>
10.1	Графы, изоморфизм и инварианты	131
10.2	Хроматический многочлен	132
10.3	Немного о топологии графа	136
10.4	Многочлен Пенроуза	137

10.5	Соотношения Татта . . . . .	139
10.6	Теорема Татта . . . . .	140
10.7	Доказательство теоремы Татта . . . . .	141
10.8	Новые примеры инвариантов Татта . . . . .	143
10.9	Задачи . . . . .	146
<b>11</b>	<b>Алгебра Хопфа графов</b>	<b>149</b>
11.1	Алгебра Хопфа графов . . . . .	149
11.1.1	Структура алгебры . . . . .	149
11.1.2	Структура коалгебры . . . . .	150
11.2	Примитивные элементы . . . . .	152
11.3	Факторалгебры биалгебры графов . . . . .	155
11.3.1	4-биалгебра . . . . .	156
11.3.2	Взвешенные графы . . . . .	158
11.4	4-инварианты . . . . .	160
11.5	Оснащенные модификации графовых алгебр . . . . .	162
11.6	Задачи . . . . .	164
<b>III</b>	<b>Языки, грамматики, автоматы</b>	<b>166</b>
<b>12</b>	<b>Языки и конечные автоматы</b>	<b>167</b>
12.1	Язык Дика . . . . .	167
12.2	Конечные автоматы . . . . .	168
12.3	Автоматы со стеком . . . . .	171
12.4	Задачи . . . . .	173
<b>13</b>	<b>Языки и формальные грамматики с однозначным выводом</b>	<b>175</b>
13.1	Правила вывода в языке Дика . . . . .	175
13.2	Формальные грамматики с однозначным выводом . . . . .	177
13.3	Производящие функции регулярных языков . . . . .	180
13.4	Представления производящих функций в виде непрерывных дробей . . . . .	181
13.5	Сравнения в последовательностях . . . . .	185
13.6	Задачи . . . . .	189
<b>14</b>	<b>Библиографические замечания</b>	<b>191</b>

Часть I

Элементы перечислительной  
комбинаторики

# Глава 1

## Элементарные производящие функции

В первой части курса мы займемся задачами перечисления. Они заключаются в подсчете числа объектов, принадлежащих некоторому семейству конечных множеств. У каждого множества семейства имеется свой номер, и результатом перечисления служит некоторая последовательность натуральных чисел. Перечислительные задачи встречаются во всех областях математики, и в последние годы они вышли на первый план в алгебраической геометрии, топологии, многих направлениях математической физики.

Как правило, задача перечислительной комбинаторики “в принципе” разрешима: для каждого множества из семейства можно выписать все его элементы и таким образом узнать их число. Проблема, однако, состоит в том, чтобы найти “хорошее” решение, не требующее выписывания всех элементов изучаемых множеств. При этом понять, что такое хорошее решение, довольно трудно. Зачастую удается лишь сравнить два решения и сказать, какое из них лучше.

Наиболее подходящим языком для решения перечислительных задач оказывается язык производящих рядов. Операции с комбинаторными объектами очень естественно выражаются в терминах производящих функций. Однако перечислительная комбинаторика не сводится к производящим функциям — привлечение методов из смежных областей математики (например, из анализа или теории групп) дает новый взгляд на перечислительные задачи и позволяет находить неожиданные подходы к их решению.

### 1.1 Перестановки и сочетания

Будем обозначать число элементов в конечном множестве  $A$  через  $|A|$ ; например,  $|\{4, 5, 7\}| = 3$ .

Пусть  $N_n$  обозначает множество натуральных чисел от 1 до  $n$ , т.е.  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . *Перестановка* этого множества это его взаимно-однозначное



отображение в себя,  $\sigma : N_n \rightarrow N_n$ . *Тождественная* перестановка оставляет каждый элемент на месте. Множество всех перестановок этого множества обозначается через  $\mathcal{S}_n$ . Композиция перестановок является перестановкой, и у каждой перестановки есть обратная — такая, композиция с которой является тождественной перестановкой. Поэтому множество  $\mathcal{S}_n$  образует группу.

Подсчитаем количество различных перестановок, т.е. количество элементов в группе  $\mathcal{S}_n$ . Это количество равно количеству различных взаимно-однозначных отображений любых двух множеств из  $n$  элементов (не обязательно одинаковых). Подсчитать их можно, например, так. Группа  $\mathcal{S}_1$  состоит, очевидно, из одного элемента — тождественного отображения множества  $N_1 = \{1\}$  в себя. Разобьем теперь все взаимно-однозначные отображения из  $N_n$  в себя на  $n$  подмножеств в зависимости от того, в какой элемент перешел элемент 1. Все эти  $n$  подмножеств содержат одинаковое количество элементов, и это количество равно количеству взаимно-однозначных отображений двух  $(n-1)$ -элементных множеств, т.е. числу элементов группы  $\mathcal{S}_{n-1}$ . Поэтому

$$|\mathcal{S}_n| = n|\mathcal{S}_{n-1}| = n(n-1)|\mathcal{S}_{n-2}| = \dots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1.$$

Это число — произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  — принято называть *факториалом числа  $n$*  и обозначать  $n!$ .

Множество  $N_n$  содержит  $n$  одноэлементных подмножеств. Нетрудно видеть, что число двухэлементных подмножеств в нем равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Действительно, первый элемент из двух мы можем выбрать  $n$  способами, а второй  $n-1$  способами из еще невыбранных элементов. Значит, упорядоченную пару элементов можно выбрать  $n(n-1)$  способами. Поскольку две пары  $a, b$  и  $b, a$  образуют одно и то же множество, для подсчета двухэлементных подмножеств необходимо количество упорядоченных пар поделить на 2.

Как подсчитать число  $k$ -элементных подмножеств в  $N_n$  для произвольного натурального числа  $k$ ? Во-первых, очевидно, что при  $k > n$  это число равно 0. Если же  $k \leq n$ , то будем строить все  $k$ -элементные подмножества в  $N_n$  следующим образом. Возьмем произвольную перестановку множества  $N_n$ , и возьмем первые  $k$  элементов в этой перестановке (т.е. те элементы, в которые перешли  $1, 2, \dots, k$ ). Ясно, что таким образом мы получим все  $k$ -элементные подмножества, причем каждое из них будет встречаться одно и то же количество раз. Это количество раз равно  $k!(n-k)!$ , поскольку перестановки первых  $k$  элементов и оставшихся  $n-k$  элементов не меняют выбранное подмножество. Поэтому для подсчета числа  $k$ -элементных подмножеств в  $N_n$  нужно разделить общее число перестановок на  $k!(n-k)!$ . Полученное число называется *числом сочетаний* из  $n$  элементов по  $k$  и обозначается через

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.1)$$

(В литературе на русском и французском языках чаще встречается обозначение  $C_n^k$ , однако его использование предполагает, что  $n$  — натуральное чис-

ло; мы же будем пользоваться сочетаниями в ситуациях, когда  $n$  — не обязательно натуральное число, что и объясняет наш выбор обозначения  $\binom{n}{k}$ , принятого в англоязычных текстах.) Поскольку дополнение  $k$ -элементного множества в множестве из  $n$  элементов состоит из  $n - k$  элементов, количество  $k$ -элементных подмножеств в  $n$ -элементном множестве равно количеству  $(n - k)$ -элементных подмножеств в нем, что прекрасно подтверждается выведенной нами формулой для числа сочетаний:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

В случае  $k = n$  формула для числа сочетаний имеет вид

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{1}{0!}.$$

Поскольку число  $n$ -элементных подмножеств в  $n$ -элементном множестве, очевидно, равно 1, мы обязаны положить  $0! = 1$ . Тогда формула для числа сочетаний приобретает смысл и при  $k = 0$ :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

— в произвольном множестве имеется ровно одно 0-элементное подмножество (пустое множество).

Числа сочетаний это в точности коэффициенты, встречающиеся в разложении степеней бинорма:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n. \quad (1.2)$$

Действительно,

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y) \dots (x + y),$$

и коэффициент при  $x^{n-k}y^k$  в произведении равен количеству  $k$ -элементных подмножеств в множестве из  $n$  скобок  $(x + y)$ . Это в точности те скобки, из которых мы выбираем слагаемое  $y$ .

Уже это простое наблюдение позволяет вывести нетривиальные комбинаторные тождества. Например,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

как результат подстановки  $x = 1, y = 1$  в разложение бинорма (1.2). (Вот другой вывод того же тождества:  $2^n$  это общее количество подмножеств в множестве из  $n$  элементов, а в левой части равенства суммируются количества подмножеств с данным числом элементов.) Точно так же получаем

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \text{ при } n > 0.$$

При нечетном  $n$  это равенство очевидным образом следует из симметрии  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , а вот при четном  $n$  его проще всего получить подстановкой  $x = 1, y = -1$  в разложение бинома.

Разложение бинома нам еще не раз встретится в этой книге, в том числе и в настоящей главе.

## 1.2 Бином Ньютона

Числитель и знаменатель дроби в формуле (1.1) для числа сочетаний можно сократить на  $(n - k)!$ , переписав ее в виде

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (1.3)$$

Такое сокращение позволяет расширить круг значений, к которым она применима — в качестве аргумента  $n$  можно брать произвольное число, не обязательно натуральное. Например,

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2(-1/2)(-3/2)(-5/2)\dots((3-2k)/2)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2k-3)}{2^k k!}.$$

При таком подходе число сочетаний перестает быть целым и теряет прямой комбинаторный смысл (нельзя сказать, что это число  $k$ -элементных подмножеств в “полуэлементном множестве”). Вообще, число  $n$  может быть иррациональным и даже комплексным. Однако по-прежнему естественно полагать

$$\binom{n}{0} = 1$$

для произвольного  $n \neq 0$ .

Если  $n$  натуральное или 0, то при  $k > n$  в числителе формулы (1.3) встречается нулевой множитель, и поэтому все выражение равно 0. Напротив, если  $n$  не является целым неотрицательным числом, то число сочетаний  $\binom{n}{k}$  не является нулевым ни при каком  $k$ .

Такие обобщенные числа сочетаний можно применить для получения разложения бинома в произвольной степени, не только в целой. А именно,

$$(1+s)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}s + \binom{\alpha}{2}s^2 + \binom{\alpha}{3}s^3 + \binom{\alpha}{4}s^4 + \dots \quad (1.4)$$

Здесь в обозначениях  $n$  заменено на  $\alpha$ , чтобы подчеркнуть, что мы больше не считаем показатель натуральным, а первая переменная заменена на 1, чтобы не было необходимости решать, что такое  $x$  в ненатуральной степени ( $1^\alpha = 1$  для любого показателя  $\alpha$ ). В случае, если число  $\alpha$  является натуральным, разложение (1.4) совпадает с обычной степенью бинома. Для ненатурального показателя степени оно было введено Ньютоном и представляет собой бесконечный степенной ряд. Этот ряд можно считать определением левой части (а можно — и в курсе математического анализа это

делается — доказывать, что ряд сходится при  $|s| < 1$ , причем слева от знака равенства действительно написана функция, к которой он сходится).

Вот пример разложения бинома для  $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}(1+s)^{1/2} &= 1 + \binom{1/2}{1}s + \binom{1/2}{2}s^2 + \binom{1/2}{3}s^3 + \binom{1/2}{4}s^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{16}s^3 - \frac{5}{128}s^4 + \dots\end{aligned}$$

### 1.3 Экспонента

Экспонента является одной из важнейших функций во всей математике. Ее определяющее свойство состоит в том, что она преобразует сумму в произведение. Давайте найдем такую функцию  $f = f(s)$ , что тождественно выполняется равенство

$$f(s+t) = f(s)f(t). \quad (1.5)$$

Подставляя  $s = 0, t = 0$ , мы сразу заключаем, что  $f(0) = f(0) \cdot f(0)$ , откуда  $f(0)$  равняется либо 0, либо 1. Мы рассмотрим только случай  $f(0) = 1$ , оставив случай  $f(0) = 0$  в качестве задачи в конце главы (см. задачу 1.4).

Пусть  $f$  имеет разложение

$$f(s) = 1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots$$

Тогда условие (1.5) на функцию  $f$  записывается в виде равенства

$$1 + a_1(s+t) + a_2(s+t)^2 + a_3(s+t)^3 + \dots = (1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots) \cdot (1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots),$$

которое должно выполняться тождественно по  $s$  и  $t$ . Найдем, к каким ограничениям на коэффициенты  $a_i$  приводит это равенство. Для этого будем последовательно сравнивать коэффициенты при мономах данной степени в левой и правой его частях. При мономах первой степени получаем равенство

$$a_1(s+t) = a_1s + a_1t,$$

которое выполняется тождественно при любом значении коэффициента  $a_1$ . Зафиксируем какое-нибудь значение этого коэффициента и обозначим его через  $a$ ,  $a_1 = a$ .

Для мономов степени 2 должно выполняться равенство

$$a_2(s+t)^2 = a_2s^2 + a^2st + a_2t^2,$$

или

$$2a_2st = a^2st,$$

которое выполняется тождественно только если  $a_2 = a^2/2$ . Рассуждая так же далее получаем

$$a_3(s+t)^3 = a_3s^3 + \frac{a^3}{2}s^2t + \frac{a^3}{2}st^2 + a_3t^3,$$

откуда

$$a_3 = a^3/6.$$

Нетрудно видеть, что на каждом шаге, если соответствующее уравнение разрешимо, то решение единственно и дает значение  $a_n$  равным  $a^n$  с некоторым коэффициентом.

Можно было бы показать, что решение действительно всегда существует и коэффициент при  $a^n$  равен  $1/n!$ . Мы поступим наоборот и определим экспоненту разложением

$$e^{as} = \exp(as) = 1 + \frac{a}{1!}s + \frac{a^2}{2!}s^2 + \frac{a^3}{3!}s^3 + \frac{a^4}{4!}s^4 + \dots$$

Это бесконечный степенной ряд, коэффициенты которого — обратные факториалы.

Теперь нетрудно проверить, что

$$e^{a(s+t)} = e^{as}e^{at}.$$

Действительно, нам надо доказать, что

$$1 + \frac{a(s+t)}{1!} + \frac{a^2(s+t)^2}{2!} + \frac{a^3(s+t)^3}{3!} + \dots = \left(1 + \frac{as}{1!} + \frac{a^2s^2}{2!} + \frac{a^3s^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots\right).$$

В левой части равенства моном  $s^k t^l$  появляется только в разложении бинома  $(s+t)^n$ , где  $n = k+l$ , причем коэффициент при этом мономе равен

$$\frac{a^n}{n!} \binom{n}{k} = \frac{a^n}{k!l!}.$$

Этот коэффициент в точности совпадает с коэффициентом при  $s^k t^l$  в правой части равенства. Поэтому всякий моном входит в левую и правую части равенства с одним и тем же коэффициентом.

Зная, что решение уравнения (1.5) с  $f(0) = 1$  — если оно существует — однозначно определяется коэффициентом при  $s$ , мы заключаем, что экспонента и является этим единственным решением. При  $a = 0$  экспонента тождественно равна 1. Если же  $a \neq 0$ , то экспонента  $e^{as}$  получается из  $e^s$  обратимой заменой  $s$  на  $as$ . Поэтому чаще всего мы будем пользоваться экспонентой  $e^s$ , отвечающей значению  $a = 1$ .

Тригонометрические функции просто выражаются через экспоненту:

$$\begin{aligned} \sin s &= \frac{e^{\sqrt{-1}s} - e^{-\sqrt{-1}s}}{2\sqrt{-1}} = s - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{5!}s^5 - \dots; \\ \cos s &= \frac{e^{\sqrt{-1}s} + e^{-\sqrt{-1}s}}{2} = 1 - \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\sqrt{-1}$  — комплексное число, квадрат которого равен  $-1$ ; его часто обозначают через  $i$ , однако такое обозначение может привести к путанице.

Смысл переменной  $s$ , от которой берется экспонента, может быть самым разным. Например,  $s$  может обозначать дифференцирование:

$$e^{\frac{d}{dt}} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{d}{dt} + \frac{1}{2!} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d}{dt} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left( \frac{d}{dt} \right)^4 + \dots,$$

и мы вправе спросить себя, что является экспонентой от дифференцирования. Здесь  $k$ -я степень дифференцирования  $\left( \frac{d}{dt} \right)^k$  это операция взятия  $k$ -ой производной,  $\left( \frac{d}{dt} \right)^k = \frac{d^k}{dt^k}$ . Для того, чтобы понять, чему равна экспонента от дифференцирования, посмотрим, как она действует на многочленах. Для этого достаточно посмотреть, как она действует на всех степенях  $t^k$  переменной  $t$ . К счастью, результат  $(k+1)$ -го и всех старших дифференцирований монома  $t^k$  равен 0, поэтому при применении  $e^{\frac{d}{dt}}$  к  $t^k$  в правой части равенства остается лишь конечное число слагаемых:

$$\begin{aligned} e^{\frac{d}{dt}} t^k &= \left( 1 + \frac{1}{1!} \frac{d}{dt} + \frac{1}{2!} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left( \frac{d}{dt} \right)^k \right) t^k \\ &= t^k + \frac{k}{1!} t^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} t^{k-2} + \dots + \frac{k!}{k!} \\ &= \binom{k}{k} t^k + \binom{k}{k-1} t^{k-1} + \binom{k}{k-2} t^{k-2} + \dots + \binom{k}{0}. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства есть не что иное как разложение бинома  $(1+t)^k$ , и мы заключаем, что

$$e^{\frac{d}{dt}} t^k = (t+1)^k.$$

Поскольку экспонента дифференцирования действует на многочленах линейно, это означает, что для любого многочлена  $p = p(t)$

$$e^{\frac{d}{dt}} p(t) = p(t+1).$$

Другими словами, экспонента дифференцирования является сдвигом на 1. Это глубокое утверждение лежит в основе теории групп Ли. Мы будем им неоднократно пользоваться.

## 1.4 Производящие функции и действия над ними

Перейдем к строгим определениям.

**Определение 1.4.1.** Пусть  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — произвольная (бесконечная) последовательность чисел. Производящей функцией (производящим рядом) для этой последовательности будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots,$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является *производящим многочленом*.

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Производящую функцию, как и обычную функцию, мы будем часто обозначать одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

Две производящие функции равны в том и только в том случае, если у них совпадают коэффициенты при каждой степени переменной. Поэтому мы часто будем проверять равенство производящих функций или решать уравнения на них, последовательно сравнивая коэффициенты при  $s^0$ ,  $s^1$ ,  $s^2$  и т.д.

*Замечание 1.4.2.* Употребляя слово “функция”, мы вовсе не имеем в виду, что написанное выражение действительно является функцией. Так, не следует думать, будто мы можем сказать, чему равно “значение  $A(1)$  производящей функции  $A$  в точке 1”. Для этого нам пришлось бы сосчитать сумму бесконечного ряда  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ . Изучение производящих функций не требует суммирования бесконечных числовых рядов. Переменная  $s$  является *формальной*, и сумма ряда  $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$  смысла не имеет. Однако верны утверждения  $A(0) = a_0$ ,  $A'(0) = a_1$ ,  $A''(0) = 2a_2$  и т.д..

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином “производящая функция” мы будем также пользоваться термином “формальный степенной ряд”.

**Определение 1.4.3.** *Суммой* двух производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots$$

называется производящая функция

$$A(s) + B(s) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \dots$$

*Произведением* производящих функций  $A$  и  $B$  называется производящая функция

$$A(s)B(s) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)s^2 + \dots$$

Операции сложения и умножения производящих функций, очевидно, коммутативны ( $A + B = B + A$ ,  $AB = BA$ ) и ассоциативны ( $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,  $(AB)C = A(BC)$ ); кроме того, выполняется дистрибутивный закон ( $A(B + C) = AB + AC$ ).

**Определение 1.4.4.** Пусть

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$$

и

$$B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 \dots$$

— две производящие функции, причем  $B(0) = b_0 = 0$ .

*Подстановкой* производящей функции  $B$  в производящую функцию  $A$  называется производящая функция

$$\begin{aligned} A(B(t)) &= a_0 + a_1B(t) + a_2B^2(t) + a_3B^3(t) + \dots \\ &= a_0 + a_1b_1t + (a_1b_2 + a_2b_1^2)t^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)t^3 + \dots \end{aligned}$$

Если, например,  $B(t) = -t$ , то

$$A(B(t)) = A(-t) = a_0 - a_1t + a_2t^2 - a_3t^3 + \dots$$

Производящая функция  $A = A(s)$  называется *четной*, если  $A(-s) = A(s)$  *нечетной*, если  $A(-s) = -A(s)$ . Функция является четной в том и только в том случае, если ее степенной ряд содержит лишь члены четной степени. Функция является нечетной в том и только в том случае, если ее степенной ряд содержит лишь члены нечетной степени. Так, например, функция  $\cos(s)$  — четная, функция  $\sin(s)$  — нечетная, а функция  $\exp(s)$  не является ни четной, ни нечетной — ее разложение в ряд содержит ненулевые коэффициенты как при четных, так и при нечетных степенях переменной  $s$ .

Обратите внимание на то, что операция подстановки функции, отличной от нуля в нуле, не определена. При попытке подставить такую функцию мы столкнулись бы с необходимостью суммировать бесконечные числовые ряды.

Конечно же, если обе производящие функции  $A$  и  $B$  являются многочленами, то определения суммы, произведения и подстановки для них совпадают с обычными определениями этих операций для многочленов. Определения этих операций на степенных рядах являются результатом их продолжения с многочленов.

Чтобы познакомиться с производящими функциями поближе, давайте докажем важную теорему. Линейную функцию  $B(t) = bt$ ,  $b \neq 0$ , легко обратить — обратной к ней относительно подстановки функцией является функция  $s/b$ . Добавление старших степеней переменной не влияет на обратимость функции.

**Теорема 1.4.5** (об обратной функции). Пусть функция

$$B(t) = b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots$$



такова, что  $B(0) = b_0 = 0$ , а  $b_1 \neq 0$ . Тогда существуют такие функции

$$A(s) = a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots, \quad A(0) = 0$$

и

$$C(u) = c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 + \dots, \quad C(0) = 0,$$

что

$$A(B(t)) = t \quad \text{и} \quad B(C(u)) = u.$$

Функции  $A$  и  $C$  единственны.

Функция  $A$  называется *левой обратной*, а функция  $C$  — *правой обратной* к функции  $B$ .

**Доказательство.** Докажем существование и единственность левой обратной функции. Доказательство для правой обратной аналогично. Будем определять коэффициенты функции  $A$  последовательно. Коэффициент  $a_1$  определяется из условия  $a_1b_1 = 1$ , откуда

$$a_1 = \frac{1}{b_1}.$$

Предположим теперь, что коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  уже определены. Коэффициент  $a_{n+1}$  определяется из условия

$$a_{n+1}b_1^{n+1} + \dots + a_1b_{n+1} = 0,$$

где точками обозначен некоторый многочлен от  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$ . Тем самым, условие представляет собой линейное уравнение на  $a_{n+1}$ , причем коэффициент  $b_1^{n+1}$  при  $a_{n+1}$  отличен от нуля. Такое уравнение имеет единственное решение, и теорема доказана.  $\square$

Итак, мы научились складывать и умножать степенные ряды и представлять их друг в друга. Хотелось бы также научиться делить их друг на друга. Последняя операция не всегда корректно определена. В этом отношении степенные ряды похожи на целые числа: не всегда целое число при делении на другое целое число дает в ответе целое число. Однако, во всяком случае, возможно деление на степенной ряд, значение которого в нуле отлично от нуля.

**Утверждение 1.4.6.** Пусть

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots$$

— формальный степенной ряд, причем  $A(0) = a_0 \neq 0$ . Тогда существует единственный формальный степенной ряд

$$B(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + \dots,$$

такой что  $A(s)B(s) = 1$ .

**Доказательство.** Снова проведем доказательство по индукции. Значение коэффициента  $b_0$  находится легко,  $b_0 = \frac{1}{a_0}$ . Пусть теперь все коэффициенты ряда  $B$  вплоть до степени  $n-1$  однозначно определены. Коэффициент при  $s^n$  определяется из условия

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0.$$

Это линейное уравнение на  $b_n$ , причем коэффициент  $a_0$  при  $b_n$  отличен от нуля. Поэтому уравнение имеет единственное решение.  $\square$

Отметим, что, несмотря на теоремы существования, нахождение обратной функции — относительно подстановки или относительно деления — в явном виде может оказаться сложной задачей, даже если сама функция относительно проста. Скажем, вычисление функции  $1/\cos s$  займет у нас целый параграф, и приведет к очень интересному результату.

## 1.5 Дифференцирование и интегрирование производящих функций

Для производящих функций обычное определение производной можно записать в следующем виде.

**Определение 1.5.1.** Пусть  $A = A(s)$  — производящая функция. Производной этой функции называется функция

$$A'(s) = \left. \frac{A(s+t) - A(s)}{t} \right|_{t=0}.$$

Поскольку при  $t = 0$  числитель дроби в определении производной обращается в нуль, этот числитель делится на  $t$ , и определение корректно. Дифференцирование, очевидно, линейная операция, поэтому для того, чтобы понять, как оно действует на производящих функциях, достаточно посмотреть на его действие на степенях переменной. Имеем

$$(s^k)' = \left. \frac{(s+t)^k - s^k}{t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\binom{k}{1} s^{k-1} t + \dots}{t} \right|_{t=0} = k s^{k-1}.$$

Здесь многоточие в числителе обозначает многочлен, делящийся на  $t^2$ ; после деления на  $t$  и приравнивания  $t$  нулю этот многочлен обращается в 0. Тем самым, дифференцирование произвольной производящей функции  $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$  дает

$$A'(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + 4a_4 s^3 + \dots$$

Докажем *правило дифференцирования сложной функции*:

$$(A(B(t)))' = A'(B(t))B'(t).$$

В силу линейности дифференцирования, для проверки этого равенства достаточно рассмотреть случай, когда  $A(s) = s^k$  — моном. Теперь мы должны доказать равенство

$$(B^k(t))' = kB^{k-1}(t)B'(t)$$

для любой производящей функции  $B$ . Доказательство этого равенства требует последовательного сравнения коэффициентов при  $t^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Коэффициенты функции  $B$  при степенях  $i+2$  и выше не влияют на коэффициенты при  $t^i$  в обеих частях равенства. Поэтому его достаточно проверить для случая, когда  $B$  — многочлен, а в этом случае оно хорошо известно.

Определение дифференцирования само по себе позволяет нам решать простейшие дифференциальные уравнения. Найдем, например, функцию, производная которой совпадает с ней самой,

$$F'(s) = F(s). \quad (1.6)$$

Пусть  $F$  имеет вид  $F(s) = f_0 + f_1s + f_2s^2 + \dots$ . Тогда  $F'(s) = f_1 + 2f_2s + 3f_3s^2 + \dots$ . Сравнивая коэффициенты при нулевой степени переменной в левой и правой частях равенства (1.6), мы заключаем, что  $f_1 = f_0$ . Сравнение коэффициентов при первой степени  $s$  дает  $2f_2 = f_1$ , откуда  $f_2 = \frac{1}{2}f_1 = \frac{1}{2}f_0$ . Продолжая таким же образом, мы заключаем, что  $f_k = \frac{1}{k!}f_0$  для всех  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Обозначим  $f_0$  через  $c$ . Наше рассуждение приводит к следующему выводу:

*Всякое решение уравнения (1.6) имеет вид*

$$F(s) = c \left( 1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{3!}s^3 + \dots \right) = ce^s$$

для некоторой постоянной  $c$ . Тем самым, уравнение (1.6) имеет единственное решение с заданным значением  $F(0) = c$ . Ниже в этой книге мы не раз будем обсуждать решение дифференциальных уравнений на производящие функции.

*Интегралом* функции  $A$  называется функция

$$\int A(s) = a_0s + a_1\frac{s^2}{2} + a_2\frac{s^3}{3} + \dots + a_n\frac{s^{n+1}}{(n+1)} + \dots$$

Операция дифференцирования обратна операции интегрирования:

$$\left( \int A(s) \right)' = A(s).$$

Операция же интегрирования производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат, вообще говоря, отличается от исходной функции,

$$\int A'(s) = A(s) - A(0).$$

*Замечание 1.5.2.* Нетрудно видеть, что для функций, представимых в виде степенных рядов, формула для производной соответствует обычной. Формула для интеграла соответствует значению интеграла с переменным верхним пределом

$$\int A(s) = \int_0^s A(\xi) d\xi.$$

Последнее замечание позволяет подсчитывать производящие функции для большого числа разнообразных последовательностей. Вычислим, например, обратную функцию к экспоненте. Эта функция называется натуральным логарифмом и обозначается  $\ln(\cdot)$ ,  $\ln(e^s) = s$ . Разложение экспоненты начинается с 1, поэтому аргумент логарифма нужно сдвинуть в 1:

$$\ln(1+t) = l_1 t + l_2 t^2 + l_3 t^3 + \dots$$

(свободный член в разложении равен 0, поскольку  $\ln(1) = 0$ ).

Для вычисления коэффициентов разложения логарифма воспользуемся тем, что производная функции и обратной к ней в произведении дают 1. Действительно, если  $A(B(s)) = s$ , то  $A'(B(s))B'(s) = 1$  и

$$A'(t) = \frac{1}{B'(s)} \text{ при } t = B(s).$$

Поскольку  $\frac{d}{ds} e^s = e^s$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \ln(1+t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots,$$

откуда, интегрируя,

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots$$

Мы будем чаще пользоваться следующим вариантом последней формулы:

$$-\ln(1-t) = \ln(1-t)^{-1} = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \dots \quad (1.7)$$

Отметим, что бином Ньютона удобно записывать с помощью экспоненты:

$$(1+t)^a = e^{a \ln(1+t)}.$$

В качестве еще одного примера, вычислим производящую функцию

$$f(s) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}s + \frac{1}{3 \cdot 4}s^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}s^n + \dots$$

Умножая функцию  $f$  на  $s^2$  и дифференцируя, получаем

$$(s^2 f(s))' = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \dots = \ln(1-s)^{-1},$$

откуда

$$f(s) = s^{-2} \int \ln(1-s)^{-1} = s^{-2} ((s-1) \ln(1-s)^{-1} + s).$$

## 1.6 Алгебра и топология формальных степенных рядов

Ниже приводятся некоторые сведения из теории формальных степенных рядов. Они не используются в книге, но могут помочь обозначить место этой теории в ряду других математических дисциплин.

С алгебраической точки зрения множество формальных степенных рядов (с коэффициентами в поле комплексных, вещественных или рациональных чисел) образует (бесконечномерное) *векторное пространство* над этим полем. Операция умножения рядов превращает это векторное пространство в *алгебру*, которая обозначается  $\mathbb{C}[[s]]$  (соотв.,  $\mathbb{R}[[s]]$  или  $\mathbb{Q}[[s]]$ ). Важную роль в этой алгебре играют *идеалы*, т.е. такие подмножества  $I \subset \mathbb{C}[[s]]$ , что  $fI \subset I$  для любого элемента  $f \in \mathbb{C}[[s]]$ . В алгебре формальных степенных рядов все идеалы — *главные*, т.е. все они имеют вид  $f\mathbb{C}[[s]]$  для некоторой функции  $f \in \mathbb{C}[[s]]$ . Более того, все идеалы легко описать: они имеют вид  $I_k = s^k\mathbb{C}[[s]]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (т.е. идеал  $I_k$  состоит из всех формальных степенных рядов, делящихся на  $s^k$ ). Эти идеалы вложены друг в друга,  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ .

Один из идеалов  $I_k$ , а именно  $I_1$ , максимален: он не содержится ни в каком другом идеале, отличном от всей алгебры. Алгебра с одним максимальным идеалом называется *локальной*. Свойство локальности сближает алгебру формальных степенных рядов с координатными алгебрами в окрестности начала координат (алгебрами *ростков* бесконечно дифференцируемых или аналитических функций). *Факторалгебры*  $\mathbb{C}[[s]]/I_k$  называются *алгебрами срезанных многочленов* и тоже очень важны.

В алгебре формальных степенных рядов определена *топология*. *Открытыми* в этой топологии являются идеалы  $I_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  и пустое множество. Введенная топология определяет понятие *сходимости*: последовательность  $F_1(s), F_2(s), \dots$  *сходится* к формальному степенному ряду  $F(s)$ , если для любого числа  $n$  существует такой номер  $N$ , что все коэффициенты при степенях  $s^0, s^1, \dots, s^n$  у рядов  $F_k(s)$  при  $k > N$  совпадают с коэффициентами при соответствующих степенях у ряда  $F(s)$ . Многочлены — формальные степенные ряды, в которых лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля, — образуют векторное подпространство (и подалгебру) в алгебре формальных степенных рядов, которое плотно относительно введенной топологии. Все операции над рядами — сложение, умножение, подстановка, деление, — определяются для многочленов обычным образом, а на степенные ряды продолжаются так, чтобы продолженные операции были непрерывны. Такие продолжения существуют и единственны.

## 1.7 Задачи

**Задача 1.1.** Перестановка двух элементов множества  $N_n = \{1, \dots, n\}$ , оставляющая остальные элементы на месте, называется *транспозицией*. Найдите число транспозиций в группе  $\mathcal{S}_n$ .

**Задача 1.2.** Всякую перестановку можно разложить в произведение независимых циклов. Такое разложение однозначно с точностью до порядка умножаемых циклов. В частности, набор длин этих циклов определяется перестановкой однозначно. Например в  $\mathcal{S}_n$ , для транспозиции набор длин циклов состоит из одной двойки и  $n - 2$  единиц, а набор длин циклов тождественной перестановки состоит из  $n$  единиц. Сумма длин циклов равна числу элементов перестановки; другими словами, набор этих длин является *разбиением* длины перестановки. Перестановка называется *длинным циклом*, если ее разложение в произведение независимых циклов состоит из единственного цикла. Длина такого цикла, разумеется, совпадает с длиной перестановки. Найдите число длинных циклов в группе  $\mathcal{S}_n$ .

**Задача 1.3.** Найдите число элементов в  $\mathcal{S}_n$ , отвечающих разбиениям а)  $1^{n-4}2^2$  (произведение транспозиций двух пар элементов, среди которых нет общих); б)  $1^{n-3}3^1$  (циклов длины 3).

**Задача 1.4.** Докажите, что если функция  $f = f(s)$ , представимая в виде степенного ряда, преобразует сумму в произведение, т.е. тождественно выполняется равенство  $f(s+t) = f(s)f(t)$ , и  $f(0) = 0$ , то она тождественно равна 0.

**Задача 1.5.** Докажите, что логарифм преобразует произведение в сумму:

$$\ln((1+s)(1+t)) = \ln(1+s) + \ln(1+t).$$

**Задача 1.6.** Докажите следующие равенства: а)  $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$ ; б)  $(1+s)^\alpha(1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$ ; в)  $\ln((1-s)^\alpha) = \alpha \ln(1-s)$ .

**Задача 1.7.** Пусть  $p = p(t)$  — многочлен. Чему равны а)  $\exp(a \frac{d}{dt})p(t)$ ? б)  $\sin \frac{d}{dt} p(t)$ ? в)  $\cos \frac{d}{dt} p(t)$ ? г)  $\exp(\frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2})p(t)$ ? д)  $\exp(\frac{d}{dt} - \frac{d^2}{dt^2})p(t)$ ?

**Задача 1.8.** Докажите, что степенные ряды вида

$$a_1 s + a_2 s^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0,$$

образуют группу относительно операции подстановки.

**Задача 1.9.** Пусть функция  $B = B(s) = b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \dots$  такова, что  $b_1 \neq 0$ . Докажите, что правая обратная функция  $A(t)$  и левая обратная функция  $C(t)$  совпадают. Эта общая *обратная функция* обозначается через  $B^{-1}(t)$ .

**Задача 1.10.** Пусть  $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$  — производящая функция для последовательности  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Выразите через  $A$  производящие функции для последовательностей

а)  $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots$ ; б)  $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots$ ; в)  $a_0, a_1 b, a_2 b^2, a_3 b^3, \dots$ ; г)  $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, a_8, \dots$

*Задача 1.11.* Вычислите три первых ненулевых коэффициента функций, обратных относительно операции подстановки к следующим функциям: а)  $\sin s$ ; б)  $e^s - 1$ ; в)  $s + s^2$ .

*Задача 1.12.* Найдите разложение арксинуса:

$$\sin^{-1} s = \arcsin s = s + \frac{1}{2 \cdot 3} s^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} s^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} s^7 + \dots$$

*Задача 1.13.* Докажите, что не существует такого формального степенного ряда  $A(s)$ , что  $sA(s) = 1$ .

*Задача 1.14.* Докажите, что если каждый из степенных рядов  $A(s)$  и  $B(s)$  отличен от нуля, то и их произведение  $A(s)B(s)$  отлично от нуля.

*Задача 1.15.* Пусть ряды  $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ ,  $a_0 \neq 0$ , и  $B(s) = b_1s + b_2s^2 + \dots$ ,  $b_1 \neq 0$ , имеют целые коэффициенты. При каких условиях на коэффициенты этих рядов ряды  $\frac{1}{A(s)}$ ,  $B^{-1}(s)$  имеют целые коэффициенты?

*Задача 1.16.* Найдите все решения дифференциальных уравнений а)  $F'(s) = aF(s)$ , б)  $F'(s) = F^2(s)$ .

*Задача 1.17.* Найдите производящие функции для последовательностей а)  $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ; б)  $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$ .

*Задача 1.18.* Докажите, что для ряда  $B = B(t)$  с нулевым свободным членом,  $B(0) = 0$ , и произвольного ряда  $A = A(s)$

$$\left( \int A \right) (B(t)) = \int (A(B(t)) \cdot B'(t))$$

(формула замены переменных в интеграле).

*Задача 1.19.* Докажите формулу Ньютона–Лейбница

$$(A(s)B(s))' = A'(s)B(s) + A(s)B'(s).$$

*Задача 1.20.* Докажите формулу интегрирования по частям:

$$\int (A(s)B'(s) + A'(s)B(s)) = A(s)B(s) - A(0)B(0).$$

*Задача 1.21.* Докажите, что при заданном натуральном значении  $k$  любое натуральное число  $n$  единственным образом представимо в виде

$$n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \dots + \binom{b_k}{k},$$

где  $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k$ . Например, при  $k = 1$  это верно, так как всякое число  $n$  допускает единственное представление в виде  $n = \binom{n}{1}$ .

Нижеследующие задачи взяты из знаменитого сборника Поля и Сеге “Теоремы и задачи из анализа” — в скобках указан номер задачи в этом сборнике.

Задача 1.22 (I.16). Определите коэффициент  $a_n$  в разложении

$$(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^4)(1 + qs^8) \cdots = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$$

Задача 1.23 (I.33). Докажите тождество

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \cdots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Задача 1.24 (I.37). Докажите тождество

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0 \text{ при } n > 1.$$

Задача 1.25 (I.38). Докажите тождество

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Задача 1.26 (I.39). Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} 2^{2k} \binom{n+k+1}{2k+1} = n+1.$$

Задача 1.27 (I.41). Положим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + a_3x(x-1)(x-2) + \dots \\ \psi(x) &= a_0 + \frac{a_1}{2}x + \frac{a_2}{2^2}x(x-1) + \frac{a_3}{2^3}x(x-1)(x-2) + \dots \end{aligned}$$

Докажите, что тогда

$$\binom{n}{0}\varphi(0) + \binom{n}{1}\varphi(1) + \binom{n}{2}\varphi(2) + \cdots + \binom{n}{n}\varphi(n) = 2^n\psi(n)$$

и

$$\binom{n}{0}\varphi(0) - \binom{n}{1}\varphi(1) + \binom{n}{2}\varphi(2) - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\varphi(n) = (-1)^n a_n n!.$$

(Обратите внимание на то, что функции  $\varphi$  и  $\psi$ , хотя и представляют собой бесконечные суммы, не являются формальными степенными рядами, а значения  $\varphi(n)$  и  $\psi(n)$  при натуральном аргументе  $n$  корректно определены, поскольку при подстановке в ряды натурального значения аргумента все слагаемые кроме конечного числа обращаются 0.)

Задача 1.28 (I.42). Докажите тождество

$$\binom{n}{0}(0-n)^2 + \binom{n}{1}(2-n)^2 + \binom{n}{2}(4-n)^2 + \cdots + \binom{n}{\nu}(2\nu-n)^2 + \cdots = 2^n n.$$

Задача 1.29 (I.44). Докажите, что для любого многочлена  $f$  выполняется равенство

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)x^k = f(k)x^k.$$



## Глава 2

# Рациональные производящие функции

Рациональная функция — это отношение двух многочленов. Рациональные производящие функции образуют большой класс производящих функций. Производящие функции, встречающиеся на практике, очень часто принадлежат к этому классу. Например, как мы увидим, рациональными оказываются производящие функции для языков, распознаваемых конечными автоматами (регулярных языков, см. главу 12). Кроме того, теория рациональных производящих функций совпадает, по существу, с теорией решений обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

### 2.1 Геометрическая прогрессия

Простейшая рациональная функция отвечает простейшей последовательности коэффициентов — постоянной последовательности  $1, 1, 1, \dots$ . Производящая функция для этой последовательности имеет вид

$$G(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots, \quad (2.1)$$

и ее несложно выразить через элементарные производящие функции, которые мы рассматривали в предыдущей главе. Действительно, умножив обе части равенства (2.1) на  $s$ , получим

$$\begin{aligned} sG(s) &= s + s^2 + s^3 + s^4 + \dots \\ &= G(s) - 1, \end{aligned}$$

откуда

$$G(s) = \frac{1}{1-s} = (1-s)^{-1}. \quad (2.2)$$

Тот же вывод с незначительными изменениями проходит для произвольной последовательности вида  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ :

$$\begin{aligned} G_{a,r}(s) &= a + ars + ar^2s^2 + ar^3s^3 + \dots \\ &= a(1 + (rs) + (rs)^2 + (rs)^3 + \dots), \end{aligned}$$

откуда

$$rsG_{a,r}(s) = G_{a,r}(s) - a$$

и

$$G_{a,r}(s) = \frac{a}{1 - rs}. \quad (2.3)$$

Приведенные выше выкладки представляют собой не что иное, как известный вывод формулы для суммы бесконечной геометрической прогрессии. Результат этих выкладок согласуется, как нетрудно видеть, с разложением бинома  $(1 - s)^{-1}$ .

## 2.2 Последовательность Фибоначчи

Знаменитая *последовательность Фибоначчи* определяется своими начальными членами  $f_0 = f_1 = 1$  и соотношением

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \quad (2.4)$$

Из этого соотношения легко получить начало последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots,$$

в которой каждый член, начиная с  $f_2$ , равен сумме двух предыдущих. Чтобы вывести формулу производящей функции

$$\text{Fib}(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots, \quad (2.5)$$

умножим обе части равенства (2.5) на  $s + s^2$ . Получим

$$\begin{aligned} (s + s^2) \text{Fib}(s) &= s + s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 5s^5 + \dots \\ &\quad + s^2 + s^3 + 2s^4 + 3s^5 + \dots \\ &= s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + 8s^5 + \dots, \end{aligned}$$

или

$$(s + s^2) \text{Fib}(s) = \text{Fib}(s) - 1,$$

откуда

$$\text{Fib}(s) = \frac{1}{1 - s - s^2}. \quad (2.6)$$

Полученную формулу можно понимать как композицию двух производящих функций, а именно,  $(1 - s)^{-1}$  и  $s + s^2$ , т.е.

$$\text{Fib}(s) = 1 + (s + s^2) + (s + s^2)^2 + (s + s^2)^3 + \dots$$

Такое разложение, однако, не очень удобно, так как в его членах перемешаны различные степени переменной  $s$  и оно не дает явной формулы для коэффициентов. Полезнее представить дробь в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-s-s^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{s_1 \left(1 - \frac{s}{s_1}\right)} - \frac{1}{s_2 \left(1 - \frac{s}{s_2}\right)} \right),\end{aligned}$$

где  $s_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$ ,  $s_2 = (-1 - \sqrt{5})/2$  — корни уравнения  $1 - s - s^2 = 0$ . Из последнего разложения немедленно получаем

$$\text{Fib}(s) = \frac{1}{\sqrt{5}s_1} \left( 1 + \frac{s}{s_1} + \frac{s^2}{s_1^2} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{5}s_2} \left( 1 + \frac{s}{s_2} + \frac{s^2}{s_2^2} + \dots \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (s_1^{-1-n} - s_2^{-1-n}) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} (s_1^{n+1} - s_2^{n+1}) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $s_1 s_2 = -1$ .

Число  $|1/s_1| = |s_2| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$  называется *золотым сечением*. Прямоугольник, отношение сторон которого равно золотому сечению, можно разрезать на два подобных ему одинаковых прямоугольника.

Другой способ вывода производящей функции для чисел Фибоначчи использует элементарные понятия линейной алгебры. Рассмотрим пару последовательных чисел Фибоначчи  $f_n, f_{n+1}$  как координаты вектора в двумерном вещественном пространстве  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда соотношение (2.4) можно интерпретировать как правило перехода от вектора  $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$  к вектору  $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$ :

$$\Phi : \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Последнее преобразование линейно, и его можно записать в матричном виде:

$$\Phi : \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Переход от вектора  $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$  к вектору  $\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+3} \end{pmatrix}$  осуществляется путем повторного применения преобразования  $\Phi$ , и т.д. Таким образом, производящая функция для векторной последовательности Фибоначчи принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{F}(s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} s^3 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} + \Phi \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} s + \Phi^2 \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} s^2 + \Phi^3 \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} s^3 + \dots \\ &= (I + \Phi s + \Phi^2 s^2 + \Phi^3 s^3 + \dots) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ &= (I - s\Phi)^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь через  $I$  обозначена единичная матрица,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , и мы применили к векторной производящей функции вывод производящей функции для геометрической прогрессии. Единственное отличие в результате: выражение  $(I - s\Phi)^{-1}$  понимается как *обратная матрица* к матрице  $I - s\Phi$ .

Явное выражение для чисел Фибоначчи можно получить, вычислив явно матрицу  $\Phi^n$  для произвольного  $n$ . Для этого матрицу  $\Phi$  нужно диагонализировать, представив ее в виде

$$\Phi = L^{-1} \tilde{\Phi} L,$$

где  $\tilde{\Phi}$  — диагональная матрица, а матрица  $L$  невырождена. Имеем,

$$\Phi = \frac{1}{s_2^{-1} - s_1^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^{-1} & -1 \\ -s_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением

$$\Phi^n = L^{-1} \tilde{\Phi}^n L,$$

и выражениями для чисел  $s_1, s_2$ , получаем равенство (2.7).

## 2.3 Рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции

Последовательность Фибоначчи определяется линейным рекуррентным соотношением  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ . Исходя из этого соотношения и начальных значений последовательности, мы смогли найти явный вид производящей функции. Производящая функция оказалась рациональной — отношением двух многочленов. На самом деле в нашем выводе нигде не использовался конкретный вид рекуррентного соотношения. Действуя точно таким же образом, мы можем доказать аналогичную теорему о производящей функции

для произвольной последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением.

**Теорема 2.3.1.** Пусть последовательность  $a_n$  задается линейным рекуррентным соотношением порядка  $k$  с постоянными  $c_1, \dots, c_k$ :

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n \quad (2.8)$$

и числа  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  заданы. Тогда производящая функция  $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$  рациональна,  $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , причем степень многочлена  $Q$  равна  $k$ , а степень многочлена  $P$  не превосходит  $k - 1$ .

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы повторяет, по существу, рассуждение для чисел Фибоначчи. Умножив производящую функцию  $A(s)$  на  $c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_k s^k$ , получим

$$\begin{aligned} (c_1 s + \dots + c_k s^k)A(s) &= c_1 a_0 s + c_1 a_1 s^2 + c_1 a_2 s^3 + \dots + c_1 a_{k-1} s^k + \dots \\ &\quad + c_2 a_0 s^2 + c_2 a_1 s^3 + \dots + c_2 a_{k-2} s^k + \dots \\ &\quad + c_3 a_0 s^3 + \dots + c_3 a_{k-3} s^k + \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad + c_k a_0 s^k + \dots \\ &= P(s) + A(s), \end{aligned}$$

где  $P$  — некоторый многочлен, степень которого не превосходит  $k - 1$ . Действительно, коэффициент при  $s^{n+k}$  в правой части первого равенства совпадает с правой частью выражения (2.8). Отсюда непосредственно получаем утверждение теоремы.  $\square$

Отметим, что в процессе доказательства теоремы 2.3.1 был выписан явный вид многочлена  $Q$ , стоящего в знаменателе рациональной производящей функции:

$$Q(s) = 1 - c_1 s - c_2 s^2 - \dots - c_k s^k.$$

Этот многочлен определяется рекуррентным соотношением, а для вычисления числителя функции нам необходимо знать начальные члены последовательности.

Производящая функция для чисел Фибоначчи представима в виде линейной комбинации двух дробей  $1/(1 - s/s_1)$  и  $1/(1 - s/s_2)$ . Нетрудно видеть, что аналогичное утверждение справедливо и для любой рациональной функции:

**Теорема 2.3.2.** Пусть  $F(s) = P(s)/Q(s)$  — представление рациональной производящей функции в виде отношения двух взаимнопростых многочленов,  $Q(0) = 1$ . Тогда  $F$  представляется в виде суммы многочлена и линейной комбинации элементарных дробей вида  $1/(1 - q_i s)^{k_i}$ , где значения  $q_i$  обратны (комплексным) корням многочлена  $Q$ , а показатели степени  $k_i$  не превосходят кратности корня  $1/q_i$ . Такое представление единственно.

Действительно, пусть  $d_1, \dots, d_m$  — кратности попарно различных комплексных корней многочлена  $Q$ , а  $q_1, \dots, q_m$  — величины, обратные к этим корням. Представим многочлен  $Q$  в виде произведения

$$Q(s) = Q_1(s) \dots Q_m(s),$$

где каждый из многочленов  $Q_i(s)$  имеет единственный корень  $1/q_i$ ,  $Q_i(s) = (1 - q_i s)^{d_i}$ . Существует константа  $c_m$ , такая, что знаменатель разности  $F(s) - c_m / (1 - q_m s)^{d_m}$  имеет степень, меньшую чем  $Q$ . Эта константа равна значению рациональной функции

$$\frac{P(s)}{Q_1(s) \dots Q_{m-1}(s)}$$

в точке  $s = 1/q_m$ . Теперь теорема доказывается индукцией по степени знаменателя.  $\square$

Вывод векторной производящей функции для последовательности Фибоначчи также непосредственно переносится на случай произвольной рекуррентной последовательности. В общем случае двумерный вектор следует заменить  $k$ -мерным вектором

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

а матрица  $\mathbb{A}$  перехода к следующему  $k$ -мерному вектору, соответствующая рекуррентному соотношению, будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Таким образом, мы получаем векторную производящую функцию

$$\bar{A}(s) = (I - s\mathbb{A})^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\Phi$ , задающая рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи, приводится к диагональному виду линейным преобразованием. Для произвольной матрицы  $\mathbb{A}$  это, вообще говоря, не так. Это можно сделать, лишь если ее собственные числа попарно различны. Однако в общем случае ее

можно привести к жордановой нормальной форме, степени которой также несложно вычислить.

Оказывается, рациональные производящие функции в точности совпадают с производящими функциями для последовательностей, задаваемых линейными рекуррентными соотношениями. Точнее, справедлива следующая обратная теорема.

**Теорема 2.3.3.** *Если производящая функция  $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$  рациональна,  $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , где многочлены  $P$  и  $Q$  взаимно просты,  $Q(0) \neq 0$ , то начиная с некоторого номера  $n$  последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$  задается линейным рекуррентным соотношением*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n,$$

где  $k$  — степень многочлена  $Q$ , а  $c_1, c_2, \dots, c_k$  — некоторые константы.

Доказательство читателю предлагается провести самостоятельно.

## 2.4 Неоднородные рекуррентные соотношения

В предыдущем параграфе мы построили рациональные производящей функции для последовательностей, заданных линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами. Эти соотношения линейны и однородны — каждое слагаемое в правой их части представляет собой член последовательности, умноженный на некоторую константу. Наше построение несложно обобщить на случай неоднородных соотношений. Рассмотрим последовательность  $2, 3, 5, 9, 17, \dots$ , заданную соотношением

$$a_{n+1} = 2a_n - 1 \tag{2.10}$$

с начальным условием  $a_0 = 2$ . Это рекуррентное соотношение порядка 1 — очередной член последовательности определяется предыдущим членом. Однако в отличие от рекуррентных соотношений, рассматривавшихся нами ранее, в правой части соотношения (2.10) имеется неоднородная добавка — константа  $-1$ . Как следствие, теорема 2.3.1 напрямую неприменима.

Для того, чтобы вычислить производящую функцию

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots,$$

выпишем рекуррентное соотношение (2.10) для члена последовательности с номером  $n + 2$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 1$$

и, вычтя из него исходное соотношение, получим

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

В результате мы свели соотношение первого порядка (2.10) к линейному рекуррентному соотношению второго порядка, а такие соотношения мы уже умеем решать.

Ясно, как обобщить это рассуждение на случай рекуррентного соотношения произвольного порядка, в котором добавка представляет собой произвольный многочлен.

**Теорема 2.4.1.** Пусть последовательность  $a_0, a_1, \dots$  задана линейным неоднородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами порядка  $k$ , т.е.  $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + h_m(n)$ , где  $h_m(n)$  есть многочлен степени  $m$  от номера  $n$  члена последовательности. Тогда последовательность  $a_n$  задается однородным линейным рекуррентным соотношением порядка  $n + m + 1$  с постоянными коэффициентами  $u$ , как следствие, производящая функция  $A(s)$  для нее рациональна.

**Доказательство.** Пусть многочлен  $h_m$  имеет вид

$$h_m(n) = b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \dots$$

Член последовательности с номером  $n + k + 1$  имеет вид

$$a_{n+k+1} = c_1 a_{n+k} + c_2 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_{n+1} + h_m(n+1).$$

Разность этого и предыдущего членов равна

$$a_{n+k+1} - a_{n+k} = c_1 a_{n+k} + (c_2 - c_1) a_{n+k-1} + \dots - c_k a_n + (h_m(n+1) - h_m(n)).$$

Тем самым, мы представили член последовательности с номером  $n + k + 1$  в виде линейной комбинации предыдущих  $k + 1$  членов последовательности, к которой прибавлен многочлен  $h_m(n+1) - h_m(n)$ . Этот многочлен имеет вид

$$\begin{aligned} h_m(n+1) - h_m(n) &= (b_0(n+1)^m + b_1(n+1)^{m-1} + \dots) - (b_0 n^m + \dots) \\ &= (b_0 n^m + (m b_0 + b_1) n^{m-1} + \dots) - (b_0 n^m + \dots) \\ &= m b_0 n^{m-1} + \dots \end{aligned}$$

т.е. коэффициент при  $n^m$  в нем равен 0 и его степень как многочлена от  $n$  меньше  $m$ . Теперь мы можем рассуждать по индукции, последовательно уменьшая степень многочлена  $h$  в правой части рекуррентного соотношения, пока она не станет равной 0 — случай, обращаться с которым мы уже научились.  $\square$

## 2.5 Произведение Адамара рациональных производящих функций

Одно из наиболее привлекательных свойств рациональных производящих функций — их замкнутость относительно произведения Адамара.



**Определение 2.5.1.** Произведением Адамара производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots$$

называется производящая функция

$$A \circ B(s) = a_0b_0 + a_1b_1s + a_2b_2s^2 + \dots$$

Таким образом, произведение Адамара двух последовательностей — это последовательность, состоящая из почленных произведений соответственных членов этих последовательностей. Необходимость в производящей функции для произведения Адамара возникает при перечислении пар объектов одинакового порядка: если число объектов первого типа равно  $a_n$ , а число объектов второго типа  $b_n$ , то число пар объектов, составленных из элементов первого и второго типа, равно  $a_nb_n$ .

**Теорема 2.5.2.** Произведение Адамара двух рациональных производящих функций рационально.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится новая характеристика рациональных производящих функций.

**Лемма 2.5.3.** Производящая функция для последовательности  $a_0, a_1, a_2, \dots$  рациональна тогда и только тогда, когда существуют такие числа  $q_1, \dots, q_l$  и такие многочлены  $p_1(n), \dots, p_l(n)$ , что

$$a_n = p_1(n)q_1^n + \dots + p_l(n)q_l^n. \quad (2.11)$$

Выражение в правой части равенства (2.11) называется *квазимногочленом* от переменной  $n$ .

**Доказательство.** Заметим прежде всего, что производящая функция  $(1 - qs)^{-k}$  имеет вид

$$(1 - qs)^{-k} = 1 - \binom{-k}{1}qs + \binom{-k}{2}q^2s^2 - \binom{-k}{3}q^3s^3 + \dots$$

Коэффициент при  $s^n$  в этой производящей функции равен

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-n+1)}{n!} q^n &= \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} q^n \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} q^n \\ &= P_{k-1}(n)q^n, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $P_{k-1}(n) = (n+1)(n+2)\dots(n+k-1)$  — многочлен от  $n$  степени  $k-1$ . Всякая рациональная функция от переменной  $s$  представляется в виде

суммы многочлена и линейной комбинации элементарных дробей вида  $(1 - q_i s)^{-k_i}$ , поэтому коэффициенты соответствующей производящей функции являются квазимногочленами.

Наоборот, предположим, что коэффициенты производящей функции, начиная с некоторого номера, представляются в виде квазимногочлена. Покажем, что в случае квазимногочлена  $p(n)q^n$  соответствующая производящая функция рациональна. Пусть степень многочлена  $p$  равна  $k - 1$ . Многочлены  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ , определенные равенством (2.12), образуют базис в пространстве многочленов степени не выше  $k - 1$ . И в самом деле, любая последовательность многочленов степеней  $0, 1, \dots, k - 1$  образует базис в этом пространстве. Поэтому многочлен  $p$  представляется в виде линейной комбинации многочленов  $P_i$  и соответствующая производящая функция есть просто линейная комбинация функций  $(1 - qs)^{-j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k - 1$ . Для произвольного квазимногочлена мы получаем линейную комбинацию функций такого вида при разных  $q_i$ . Лемма доказана.  $\square$

**Доказательство теоремы 2.5.2.** Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что произведение квазимногочленов является квазимногочленом. Это утверждение непосредственно вытекает из формулы (2.11).  $\square$

## 2.6 Асимптотика коэффициентов рациональных функций

При решении перечислительных задач зачастую приходится интересоваться поведением числа элементов множества при росте перечисляющего параметра. Это особенно важно, если мы хотим, например, перечислять объекты на компьютере и пытаемся оценить время работы программы.

**Определение 2.6.1.** Функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  имеют одинаковую асимптотику, или одинаковый рост, при  $n \rightarrow \infty$ , если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  и он равен 1. Функция  $f$  растет медленнее функции  $g$ , если предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  существует и он равен 0. В последнем случае говорят также, что функция  $g$  растет быстрее функции  $f$ .

При вычислении асимптотики некоторые функции мы считаем “образцами”, а другие “сводим” к этим образцам. В качестве образцов берутся обычно наиболее простые монотонные функции, поведение которых хорошо изучено. Образцами могут служить

- экспонента  $a^n$  при различных значениях основания  $a > 0$ ;
- степенная функция  $n^\alpha$  при различных значениях показателя  $\alpha$ ;
- факториал  $n!$ ;
- логарифм  $\ln n$ ;

а также произведения и композиции этих функций в различных комбинациях.

Нетрудно расположить функции-образцы в порядке убывания скорости роста:

$$n!; \quad a^n, a > 1; \quad n^\alpha, \alpha > 0; \quad \ln n; \quad n^\alpha, \alpha < 0; \quad a^n, 0 < a < 1.$$

*Пример 2.6.2.* Коэффициенты производящей функции  $\ln(1-s)^{-1} = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \dots$  растут, как  $n^{-1}$  (в этом случае естественнее было бы говорить “убывают, как  $n^{-1}$ ”).

*Пример 2.6.3.* Асимптотика произвольного многочлена  $p(n) = c_0n^k + c_1n^{k-1} + \dots + c_n$ ,  $c_0 > 0$ , совпадает с асимптотикой его старшего члена  $c_0n^k$ .

В этом разделе мы найдем асимптотику коэффициентов рациональных производящих функций. Согласно лемме 2.5.3, последовательность коэффициентов рациональной производящей функции, начиная с некоторого момента, является квазимногочленом (2.11), в котором  $q_1, \dots, q_l$  — некоторые комплексные числа. Если  $|q_i| < |q_j|$ , то последовательность  $p_i(n)q_i^n$  растет медленнее, чем  $p_j(n)q_j^n$  какими бы ни были ненулевые многочлены  $p_i(n)$  и  $p_j(n)$ . Действительно, отношение этих последовательностей

$$\frac{p_i(n)q_i^n}{p_j(n)q_j^n} = \frac{p_i(n)}{p_j(n)} \left( \frac{q_i}{q_j} \right)^n$$

стремится к нулю, поскольку  $\left| \frac{q_i}{q_j} \right| < 1$ , и  $n$ -я степень этого числа стремится к нулю быстрее любой заданной степени числа  $n$ . Тем самым, асимптотика квазимногочлена (2.11) определяется слагаемыми, содержащими  $q_i$  с самыми большими модулями.

В свою очередь, асимптотика многочлена  $p(n)q^n$  определяется старшим мономом многочлена  $p$ , поэтому асимптотика любого слагаемого  $p_i(n)q_i^n$  в квазимногочлене совпадает с асимптотикой монома  $c_i n^{d_i} q_i^n$ , где  $c_i n^{d_i}$  — старший моном многочлена  $p_i$ . Тем самым, мы приходим к следующему утверждению.

**Утверждение 2.6.4.** *Если в квазимногочлене (2.11) имеется единственное слагаемое  $p_i(n)q_i^n$  с наибольшим по модулю значением  $q_i$  и многочленом  $p_i$  наибольшей степени, то асимптотика этого квазимногочлена совпадает с асимптотикой монома  $|c_i|n^{d_i}|q_i|^n$ , где  $c_i n^{d_i}$  — старший моном многочлена  $p_i$ .*

Если же таких слагаемых несколько, то вопрос об асимптотике становится более тонким. Например, в последовательности, задаваемой квазимногочленом  $(-2)^n + 2^n$  (отвечающим значениям  $q_1 = -2, q_2 = 2, \deg p_1 = \deg p_2 = 0$ ), все члены с нечетными номерами равны 0, в то время, как члены с четными номерами  $n = 2k$  растут как  $2 \cdot 2^{2k}$ . Поэтому вопрос об асимптотике таких квазимногочленов требует более аккуратной постановки и более тщательного исследования.

Приведенный пример показывает, что при наличии нескольких значений  $q_i$  с наибольшим модулем, степени многочленов при которых совпадают, разные подпоследовательности значений многочлена имеют различную асимптотику. Поэтому речь может идти только об асимптотике “наиболее возрастающих” подпоследовательностей. Это — те подпоследовательности, в которых модули слагаемых суммируются (или почти суммируются). Для таких подпоследовательностей утверждение 2.6.4 принимает следующий вид.

**Утверждение 2.6.5.** *Если в квазимногочлене (2.11) имеется несколько слагаемых  $p_i(n)q_i^n$  с наибольшим по модулю значением  $q_i$  и многочленом  $p_i$  наибольшей степени  $d$ , то последовательность значений этого квазимногочлена содержит подпоследовательность, асимптотика которой совпадает с асимптотикой монома  $cn^d|q|^n$ , где  $c = \sum |c_i|$  — сумма модулей старших коэффициентов многочленов  $p_i$ ,  $d$  — их общая степень,  $|q|$  — общее значение модулей чисел  $q_i$ . Это наибольшая возможная асимптотика подпоследовательности значений квазимногочлена.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 2.6.4, и мы его не приводим.

Для квазимногочлена (2.11), отвечающего рациональной функции  $\frac{P(s)}{Q(s)}$ , постоянные  $q_i$  это величины, обратные к корням многочлена  $Q$ , т.е. к полюсам рациональной функции. В свою очередь, степень многочлена  $p_i$  это уменьшенный на 1 порядок полюса функции  $\frac{P(s)}{Q(s)}$  в точке  $s = 1/q_i$ . Поэтому утверждение 2.6.4 можно переформулировать следующим образом.

**Утверждение 2.6.6.** *Если у рациональной функции  $\frac{P(s)}{Q(s)}$  среди ближайших к началу координат полюсов имеется единственный полюс  $1/q$  наибольшего порядка  $k$ , то асимптотика ее коэффициентов совпадает с асимптотикой коэффициентов элементарной дроби  $c/(1 - qs)^k$  в разложении этой функции в сумму элементарных дробей.*

Утверждение 2.6.5 допускает аналогичную переформулировку.

В частности, для рациональной функции, задаваемой рекуррентным соотношением (2.8), асимптотика ее коэффициентов определяется ближайшими к началу координат корнями многочлена  $Q(s) = 1 - c_1s - c_2s^2 - \dots - c_k s^k$  и их порядками. Например, для последовательности Фибоначчи  $Q(s) = 1 - s - s^2$ , поэтому ближайший к началу координат корень вещественный, равен  $s_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$  и имеет порядок 1. Значит, числа Фибоначчи имеют асимптотику  $c(1/s_1)^n$  для некоторой константы  $c$ . Мы вычислили эту константу — она оказалась равна  $(1 + \sqrt{5})/2\sqrt{5}$ .

## 2.7 Задачи

*Задача 2.1.* Рекуррентное правило образования последовательности Фибоначчи позволяет продолжить ее “назад” — для отрицательных значений индекса. Так, например,  $f_{-1} = 0$ . Чему равно  $f_{-10}$ ?

*Задача 2.2.* Рациональны ли производящие функции для последовательностей

- а)  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ; б)  $2, 6, 12, \dots, (k+1)(k+2), \dots$ ;  
 в)  $1, 4, 9, 16, \dots, k^2, \dots$ ; г)  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{k^2}, \dots$ ; д)  $f_n^2$ , где  $f_n$  — числа Фибоначчи?

Найдите соответствующие производящие функции в тех случаях, когда они рациональны.

*Задача 2.3.* Найдите представление в виде суммы элементарных дробей следующих рациональных функций: а)  $\frac{1}{1-s-2s^2}$ ; б)  $\frac{1+2s}{1-3s+4s^3}$ ; в)  $\frac{1+2s}{1-3s^3}$ .

*Задача 2.4.* Найдите представление в виде квазимногочлена и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами для коэффициентов следующих степенных рядов: а)  $\frac{1}{1-s-2s^2}$ ; б)  $\frac{1+2s}{1-3s+4s^3}$ ; в)  $\frac{1+2s}{1-3s^3}$ .

*Задача 2.5.* Известно, что следующие последовательности задаются линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами порядка 3: а)  $1, 2, 6, 18, 52, 152, 444, \dots$ ; б)  $1, 2, 2, 6, 8, 16, 28, 48, 88, \dots$  в)  $1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, \dots$ . Найдите эти соотношения и проверьте, что выписанное начало последовательности действительно им подчиняется.

*Задача 2.6.* Найдите производящие функции и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами для следующих последовательностей, заданных квазимногочленами: а)  $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$ ; б)  $b_n = (1+2n) \cdot 2^n + 1 + n + n^2$ ; в)  $c_n = (1+n+n^2) \cdot 3^n$ .

*Задача 2.7.* Пользуясь производящей функцией для чисел Фибоначчи, докажите для них тождества

- а)  $f_0 + f_1 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ ; б)  $f_0 + f_2 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1}$ ;  
 в)  $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1$ ; г)  $f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ .

*Задача 2.8.* Докажите теорему 2.3.3.

*Задача 2.9.* Докажите, что в жордановой нормальной форме матрицы из уравнения (2.9) каждому собственному числу соответствует одна жорданова клетка, размер которой равен кратности этого собственного числа как корня характеристического многочлена. [Указание: Воспользуйтесь связью между кратностью собственного числа и порядком нуля многочлена в знаменателе рациональной производящей функции.]

*Задача 2.10.* Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными формулами:

- а)  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ ,  $a_0 = a_1 = 1$ ;  
 б)  $a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n$ ,  $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ ;  
 в)  $a_{n+3} = \frac{3}{2}a_{n+2} - \frac{1}{2}a_n$ ,  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$ .

*Задача 2.11.* Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи с четными номерами  $\sum_n f_{2n} s^n$ .

*Задача 2.12.* Найдите производящую функцию для последовательности 2, 3, 5, 9, 17, ..., заданную неоднородным линейным рекуррентным соотношением  $a_{n+1} = 2a_n - 1$ .

*Задача 2.13.* Для следующих последовательностей, заданных неоднородными линейными рекуррентными соотношениями, найдите задающие их однородные линейные рекуррентные соотношения и производящие функции: а)  $a_{n+1} = a_n + 2$ ,  $a_0 = 1$ ; б)  $a_{n+2} = a_n + n + 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ; в)  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + n^2 + 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ .

*Задача 2.14.* Найдите произведения Адамара функций от  $s$   
 $(1 - qs)^{-1} \circ (1 - rs)^{-1}$ ,  $(1 - qs)^{-1} \circ (1 - qs)^{-1}$ ,  $(1 - qs)^{-k} \circ (1 - rs)^{-l}$ .

*Задача 2.15.* Найдите производящие функции для последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями а)  $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$  (1, 1, 3, 5, 11, ...); б)  $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$  (1, 1, 2, 4, 7, ... — “числа Трибоначчи”).

*Задача 2.16.* Докажите, что производящая функция  $-\ln(1 - s)$  не является рациональной а) воспользовавшись известной асимптотикой ее коэффициентов; б) воспользовавшись тем, что знаменатель ее производной  $1/(1 - s)$  имеет в точке  $s = 1$  нуль кратности 1.

*Задача 2.17.* Докажите, что производящая функция, обратная к функции  $G(s) = s + s^2$  (т.е. функция, выражающая  $s$  через  $t = G(s)$ ), не является рациональной.

*Задача 2.18.* Найдите произведение Адамара

$$\frac{1}{1 - s - s^2} \circ \frac{1}{1 - s - s^2}.$$

*Задача 2.19.* Докажите, что множество формальных степенных рядов, все коэффициенты которых отличны от 0, образует группу относительно произведения Адамара.

*Задача 2.20.* Обозначим через  $a_n$  число разбиений полосы шириной 1 и длиной  $n$  квадратиков на части, каждая из которых является либо квадратиком  $1 \times 1$ , либо домино  $1 \times 2$ . Например,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 5$ . Найдите производящую функцию для последовательности  $a_n$ .

*Задача 2.21.* Обозначим через  $b_n$  число разбиений полосы шириной 2 и длиной  $n$  квадратиков на домино  $1 \times 2$ . Например,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 2$ ,  $b_3 = 3$ . Найдите производящую функцию для последовательности  $b_n$ .

*Задача 2.22.* Обозначим через  $c_n$  число разбиений полосы шириной 3 и длиной  $n$  квадратиков на домино  $1 \times 2$ . Например,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 3$ ,  $c_3 = 0$ . Найдите производящую функцию для последовательности  $c_n$ .

*Задача 2.23.* Обозначим через  $d_n$  число разбиений стоимости  $n$  полосы шириной 2 и длиной несколько квадратиков на домино  $1 \times 2$ . Здесь стоимость замощения равна  $h + 2v$ , где  $h$  — количество горизонтальных, а  $v$  — количество вертикальных доминошек в замощении. Например,  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 0$ ,  $d_2 =$

$2, d_3 = 0, d_4 = 4$ . Найдите производящую функцию для последовательности  $d_n$ .

*Задача 2.24.* Обозначим через  $t_n$  число разбиений полосы шириной 1 и длиной  $n$  квадратиков на части, каждая из которых является либо квадратиком  $1 \times 1$ , либо домино  $1 \times 2$ , либо тримино  $1 \times 3$ . Например,  $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 4, t_4 = 7$ . Найдите производящую функцию для последовательности  $t_n$ .

*Задача 2.25.* Найдите производящую функцию для количества лесенок площадью  $n$  клеток на клетчатой плоскости (см. Рис. 2.1), состоящих из не более, чем а) двух ступенек; б) трех ступенек. (Высота каждой ступеньки равна 1, и при движении снизу вверх ступеньки укорачиваются.)

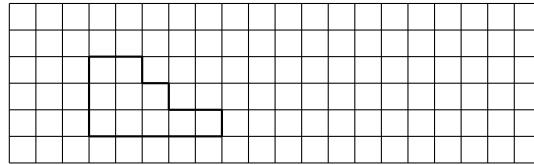


Рис. 2.1: Лесенка из трех ступенек, состоящая из 10 клеток

*Задача 2.26.* Преобразованием Пфаффа последовательности  $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$ , называется последовательность  $p_n = \text{Pf}(\{a_n\})$ , состоящая из пфаффианов

$$p_n = \text{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2k-1} \\ -a_1 & 0 & a_1 & \dots & a_{2k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{2k-1} & -a_{2k-2} & -a_{2k-3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(пфаффиан кососимметрической матрицы равен квадратному корню из ее определителя). Например, первые члены преобразования Пфаффа последовательности степеней двойки  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}, \dots$  равны

$$\text{Pf} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{Pf} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Докажите, что преобразование Пфаффа переводит а) последовательность  $\{2^{n-1}\}$  в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$ ; б) последовательность  $\{3^{n-1}\}$  в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$ ; в) последовательность Фибоначчи  $\text{Fib}_n$  в последовательность степеней двойки  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ .

Найдите преобразование Пфаффа последовательностей г)  $J_n$  и д)  $T_n$  из задачи 2.15.

**Задача 2.27.** *Полимино* это область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток. (Два полимино одинаковы, если одно можно получить из другого сдвигом.) Полимино называется *стековым*, если нижние горизонтальные отрезки его границы образуют один отрезок (см. рис. 2.2). Докажите, что число стековых полимино с периметром  $2n + 2$  равно  $\text{Fib}_{2n-2}$ . На рис. 2.3 изображены все 5 стековых полимино с периметром 8 ( $n = 3$ ).

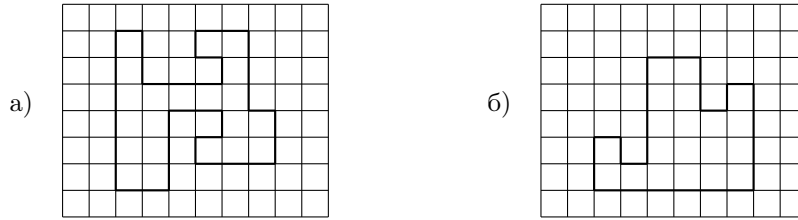


Рис. 2.2: а) Полимино и б) стековое полимино

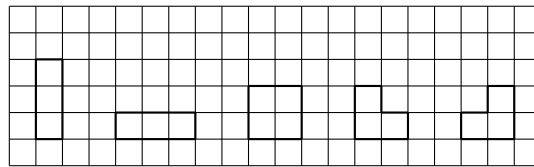


Рис. 2.3: Стековые полимино с периметром 8.

**Задача 2.28.** (Фибоначчиева система счисления) Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде  $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots$ , где  $f_n$  — числа Фибоначчи, а каждое из чисел  $a_i$  равно нулю или единице, причем единиц в сумме конечное число и два идущих подряд элемента последовательности  $a_i$  не могут равняться единице. Придумайте алгоритмы перевода чисел из фибоначчиевой системы счисления в позиционную и обратно, а также алгоритмы сложения и умножения чисел в этой системе счисления.

**Задача 2.29.** Пусть

$$A(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}, \quad B(s) = \frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

рациональные производящие функции, заданные несократимыми дробями, и

$$A \circ B(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

их произведение Адамара, представленное в виде несократимой дроби. Что можно сказать про многочлен  $Q$ , если многочлены  $Q_1$  и  $Q_2$  известны?



*Задача 2.30.* Сколько цифр в десятичной записи числа Фибоначчи с номером а) 100; б) 1000?

*Задача 2.31.* Какую наибольшую асимптотику может иметь подпоследовательность последовательности коэффициентов производящей функции

$$\frac{1}{1 - x + 2x^2}?$$

## Глава 3

# Перечисление путей на графах

Многие последовательности натуральных чисел полезно представлять себе как последовательности, перечисляющие пути в некоторых графах. При этом вид графа оказывается тесно связан со свойствами производящих функций, отвечающих данным последовательностям. Задачи о перечислении путей часто встречаются в статистических моделях математической физики. В этой главе мы рассмотрим примеры таких перечислений.

### 3.1 Пути в графах

*Граф* представляет из себя набор вершин, некоторые из которых соединены ребрами. Часто удобно представлять себе граф нарисованным на плоскости (см. рис. 3.1). Среди перечислительных задач, о которых мы будем говорить, есть задачи перечисления путей в графе. Например, сосчитаем количество различных путей ладьи из клетки А в клетку В на доске, изображенной на рис. 3.2 а), при условии, что ладья может ходить только вправо или вверх в клетку, соседнюю с той, в которой она находится.

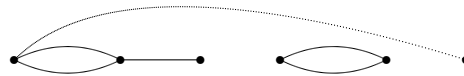


Рис. 3.1: Граф, изображенный на плоскости

Такие задачи проще всего решаются следующим способом. Поставим 1 в каждую клетку, до которой из А можно дойти за один шаг. Затем поставим числа во все клетки, до которых можно дойти за один шаг из этих клеток. Эти числа равны суммам всех единиц в клетках, из которых можно попасть в эти. Этот процесс можно продолжить и дальше, пока мы не доберемся до

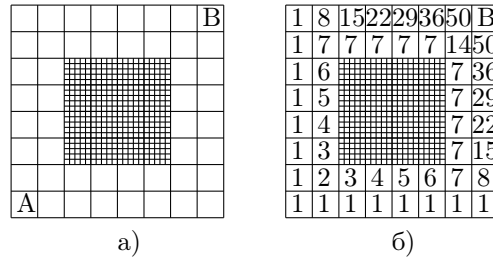


Рис. 3.2: а) Шахматная доска с вырезом и б) подсчет количества путей ладьи, ведущих из клетки А в клетку В; в каждой клетке указано количество путей из А в эту клетку

клетки В, см. рис. 3.2 б). Число 100 — сумма чисел в соседних клетках слева и снизу, которое должно стоять в этой клетке, и будет интересующим нас количеством различных путей. Разнообразные варианты этого простого рассуждения играют принципиальную роль в решении многочисленных задач.

## 3.2 Пути, перечисляемые рациональными производящими функциями

Построим граф, пути в котором перечисляются последовательностью Фибоначчи. Мы рассмотрим два варианта построения такого графа. В первом варианте расположим (бесконечное) множество вершин графа слева направо и будем считать вершины занумерованными числами  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Соединим каждую вершину ребром с ее правым соседом, а также с вершиной, следующей за ее правым соседом (см. рис. 3.3). (Мы делаем исключение, не проводя горизонтальную стрелку из первой вершины во вторую — начальные значения последовательности Фибоначчи заданы и не подчиняются рекуррентному правилу.) На каждом ребре поставим стрелку, указывающую направление движения по нему. Для каждой вершины графа подсчитаем различные пути, идущие из двух начальных вершин в данную. Ясно, что число различных путей, ведущих из начальных вершин в вершину с номером  $n + 1$ ,  $n \geq 1$ , равно сумме числа путей, ведущих в вершину с номером  $n - 1$ , и числа путей, ведущих в вершину с номером  $n$ . Тем самым, числа путей удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и числа Фибоначчи, и тем же начальным условиям; поэтому последовательность этих чисел совпадает с последовательностью Фибоначчи.

Другой способ построения графа состоит в следующем. Нарисуем вместо одной две бесконечные последовательности вершин, одна над другой. Для удобства мы верхнюю последовательность сдвинем на одну позицию вправо (см. рис. 3.4). Из каждой вершины нижнего ряда выходят стрелки в

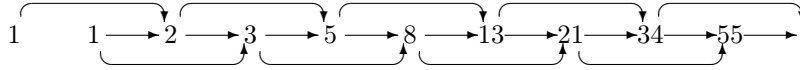


Рис. 3.3: Бесконечный граф для изображения путей, перечисляемых числами Фибоначчи

соседние с ней справа вершины обоих рядов. Из каждой вершины верхнего ряда выходит стрелка в соседнюю справа вершину нижнего ряда. Число путей в этом графе, идущих из начальной точки в точку с номером  $n$  в нижнем ряду точек, равно  $n$ -ому числу Фибоначчи. Над ним стоит  $(n-1)$ -е число Фибоначчи. Пару чисел в графе, стоящих одно над другим, можно рассматривать как координаты двумерного вектора. Тогда преобразование перехода от очередной пары точек, образующих вертикальный столбец, к следующей паре есть не что иное как линейное преобразование  $\Phi$ , которое мы рассматривали в п. 2.2: верхнее число в новом столбце совпадает с нижним числом предыдущего столбца, а нижнее равно сумме верхнего и нижнего чисел из предыдущего столбца.

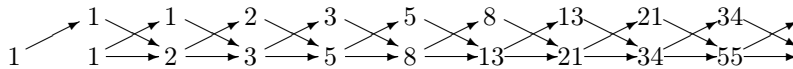


Рис. 3.4: Бесконечный граф из двух рядов вершин для изображения путей, перечисляемых числами Фибоначчи

Обобщим нашу конструкцию с чисел Фибоначчи на произвольные рациональные производящие функции. Обобщению поддаются оба способа построения графа, однако мы будем говорить лишь о втором, который приводит к “более читаемым” картинкам. Согласно теореме 2.3.1, последовательность коэффициентов рациональной функции задается линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами вида (2.8). В качестве примера рассмотрим последовательность, задаваемую соотношением третьего порядка

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_n,$$

с начальными условиями  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2$ . Вот начало этой последовательности:  $1, 0, 2, 5, 10, 22, \dots$ . Поскольку порядок рекуррентного соотношения равен 3, вершины графа образуют три последовательности (см. рис. 3.5). Из каждой вершины двух нижних рядов идет стрелка в вершину следующего ряда, стоящую в следующем столбике. Кроме того, из каждой вершины третьего ряда и из каждой вершины нижнего ряда, начиная с третьей, идет стрелка в вершину нижнего ряда, стоящую в следующем столбике. При этом над горизонтальными стрелками в первом ряду мы ставим

число 2 — “кратность”, или “вес отрезка пути”. Вместо этого мы могли бы нарисовать две стрелки, однако это загромодило бы рисунок (загромождение было бы еще более заметно, если бы вместо коэффициента 2 стояло большее число). Точно так же мы могли бы нарисовать стрелки из второго ряда в нижний, поставив на них кратность 0, что тоже не сделало бы рисунок прозрачней.

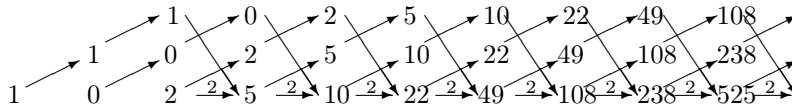


Рис. 3.5: Бесконечный граф для изображения путей, перечисляемых коэффициентами рациональной функции

Теперь ясно, как нарисовать граф, отвечающий произвольной рациональной функции. Кратность ребра при этом может быть произвольным числом, не обязательно натуральным (например, кратность может быть дробной или отрицательной). Эта кратность равна соответствующему коэффициенту в рекуррентном соотношении, задающем коэффициенты разложения рациональной функции. С помощью подобного графа легко сосчитать первые члены последовательности. Такой способ подсчета может оказаться эффективнее вычислений с помощью квазимногочленов — в том случае, если нули знаменателя рациональной функции не рациональны.

### 3.3 Числа Каталана

Порядок вычислений в арифметических выражениях задается расстановкой скобок, например,

$$(3 - 1) \cdot (4 + (15 - 9) \cdot (2 + 6)).$$

Если стереть все элементы выражения, за исключением скобок, то оставшиеся скобки образуют *правильную скобочную структуру* :

$$()((())).$$

Вот все правильные скобочные структуры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} &() \\ &()() \quad (()) \\ &()()() \quad ()(()) \quad (())() \quad (())() \quad ((())) \end{aligned}$$

**Определение 3.3.1.** Числом Каталана  $c_n$  называется число различных правильных скобочных структур из  $n$  пар скобок.

Удобно полагать  $c_0 = 1$ . Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \dots$$

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1. число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;
2. число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям 1 и 2, является правильной скобочной структурой.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Рассмотрим в правильной скобочной структуре из  $n + 1$  пар скобок пару скобок, в которую входит самая левая скобка структуры. Тогда последовательность скобок внутри этой пары образует правильную скобочную структуру и последовательность скобок вне этой пары образует правильную скобочную структуру:  $(\dots)\dots$ , где каждое многоточие обозначает некоторую правильную скобочную структуру. Если число пар скобок во внутренней структуре равно  $k$ , то во внешней структуре  $n - k$  пар скобок. Наоборот, по каждой паре скобочных структур из  $k$  и  $n - k$  пар скобок можно восстановить структуру из  $n + 1$  пар скобок, заключив первую структуру в скобки и приписав к результату справа вторую структуру.

Отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для чисел Каталана. На этот раз соотношение оказывается нелинейным (слагаемые в правой части являются произведениями элементов последовательности):

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \dots + c_n c_0. \quad (3.1)$$

Например, при  $n = 4$

$$\begin{aligned} c_5 &= c_0 c_4 + c_1 c_3 + c_2 c_2 + c_3 c_1 + c_4 c_0 \\ &= 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана

$$\begin{aligned} \text{Cat}(s) &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots \\ &= 1 + s + 2s^2 + 5s^3 + \dots \end{aligned}$$

Возведя ее в квадрат и умножив результат на  $s$ , получим

$$\begin{aligned} s \operatorname{Cat}^2(s) &= c_0^2 s + (c_0 c_1 + c_1 c_0) s^2 + (c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0) s^3 + \dots \\ &= s + 2s^2 + 5s^3 + 14s^4 + \dots \\ &= \operatorname{Cat}(s) - 1, \end{aligned}$$

что дает нам квадратное уравнение на производящую функцию

$$s \operatorname{Cat}^2(s) - \operatorname{Cat}(s) + 1 = 0, \quad (3.2)$$

откуда

$$\operatorname{Cat}(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s}}{2s}. \quad (3.3)$$

(Второй корень квадратного уравнения отбрасывается, так как числитель  $1 + \sqrt{1 - 4s}$  не делится на знаменатель  $2s$ .)

Вид производящей функции (3.3) позволяет найти явную формулу для чисел Каталана. Бином Ньютона в применении к выражению  $(1 - 4s)^{1/2}$  в числителе дает

$$c_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!},$$

откуда, умножая числитель и знаменатель на  $n!$  и сокращая на  $2^{n+1}$ , получаем

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (3.4)$$

В частности, производящая функция для чисел Каталана не является рациональной — формула для числа  $c_n$  показывает, что это число не является квазимногочленом от  $n$ .

Последняя формула дает и более простое (хотя и с переменными коэффициентами) рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n! \cdot (n+2)(n+1)!} = \frac{4n+2}{n+2} c_n. \quad (3.5)$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Литература, им посвященная, необозрима. Известно несколько десятков их различных определений. Приведем лишь еще две часто встречающиеся их реализации.

Рассмотрим выпуклый  $(n+2)$ -угольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки числами от 0 до  $n+1$ . *Диагональной триангуляцией* назовем разбиение многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Всякая такая триангуляция содержит  $n-1$  диагоналей. На рис. 3.6 приведены все различные диагональные триангуляции четырехугольника и пятиугольника.

Пусть  $t_n$  — число триангуляций  $(n+2)$ -угольника при  $n \geq 1$ ; положим  $t_0 = 1$ . Рассмотрим произвольную триангуляцию и выделим треугольник, примыкающий к стороне 01 (см. рис. 3.7 а)). Пусть  $k$  — номер третьей

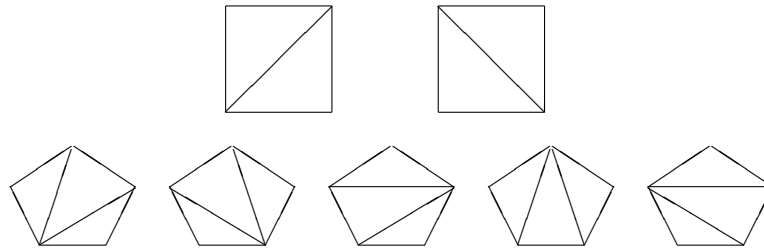


Рис. 3.6: Диагональные триангуляции 4-х и 5-угольника

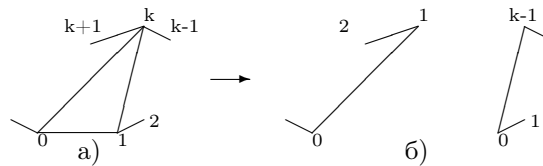


Рис. 3.7: а) Треугольник, примыкающий к стороне 01, и б) перенумерация вершин многоугольников разбиения

вершины этого треугольника. Выделенный треугольник разбивает  $(n + 2)$ -угольник на  $k$ -угольник и  $(n - k + 3)$ -угольник, каждый из которых триангулирован диагоналями. Перенумеруем вершины этих многоугольников против часовой стрелки так, чтобы нумерация вершин в каждом из них начиналась с 0 (см. рис. 3.7 б)). В результате получим пару триангуляций  $k$ -угольника и  $(n - k + 3)$ -угольника.

Наоборот, каждая пара триангуляций  $k$ -угольника и  $(n - k + 3)$ -угольника определяет триангуляцию исходного многоугольника. Поэтому

$$t_{n+1} = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \dots + t_n t_0,$$

и, поскольку  $t_0 = 1$ , последовательность чисел  $t_n$  совпадает с последовательностью Каталана.

Описанная выше процедура сопоставления триангуляции  $(n+2)$ -угольника пары триангуляций  $k$ -угольника и  $(n - k + 3)$ -угольника позволяет установить и взаимно-однозначное соответствие между триангуляциями  $(n+2)$ -угольника и скобочными структурами из  $n$  пар скобок. Действительно, предположим, что для всех меньших значений  $n$  такое соответствие установлено. Каждой триангуляции  $(n+2)$ -угольника мы сопоставили пару триангуляций многоугольников с меньшим числом сторон. По предположению, этой паре триангуляций соответствует пара скобочных структур. Заклучим первую из этих скобочных структур в скобки и припишем к ней вторую — получим новую скобочную структуру, соответствующую исходной триангуляции всего  $(n + 2)$ -угольника.

Еще одна важная реализация чисел Каталана связана с путями Дика на плоскости. Рассмотрим целочисленную решетку в положительном квадран-



те. *Путь Дика*<sup>1</sup> называется непрерывная ломаная, составленная из векторов  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ , начинающаяся в начале координат и заканчивающаяся на оси абсцисс (см. рис. 3.8).

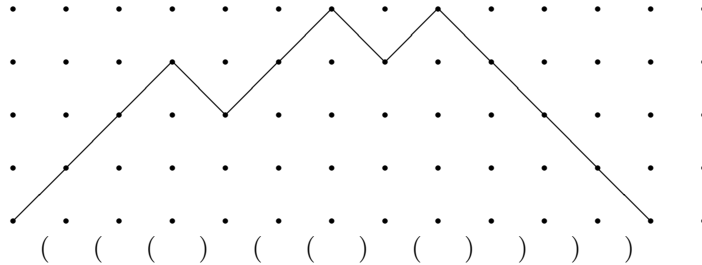


Рис. 3.8: Путь Дика и соответствующая ему скобочная структура

Совершенно ясно, как устанавливается соответствие между путями Дика и правильными скобочными структурами: нужно сопоставить вектору  $(1, 1)$  левую скобку, а вектору  $(1, -1)$  — правую скобку (см. рис. 3.8). Тогда условие того, что путь лежит в верхней полуплоскости и заканчивается на оси абсцисс, и есть в точности условие правильности скобочной структуры. Поэтому

*Число путей Дика из  $2n$  звеньев равно  $n$ -му числу Каталана  $c_n$ .*

Тем самым, числа Каталана перечисляют пути из начальной вершины в вершины нижней строки в бесконечном графе, изображенном на рис. 3.9. В отличие от графов, пути в которых перечисляются коэффициентами рациональных производящих функций, этот граф содержит бесконечно много строк вершин.

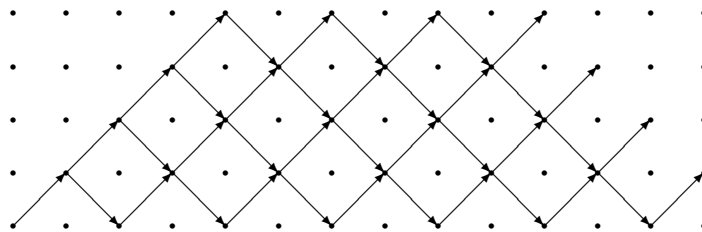


Рис. 3.9: Граф, пути в котором перечисляются числами Каталана

Пути Дика и их различные вариации имеют многочисленные интерпретации и не раз еще встретятся нам в этой книге.

<sup>1</sup>Названы в честь немецкого математика Walther von Dyck (1856–1934). Произношение и русская транскрипция имени имеют варианты; возможны написания Дайк, Дейк, Дюк.



- в каждом столбце числа возрастают (т.е. число, стоящее во второй строке, больше стоящего над ним).

Подсчитайте число таких расстановок.

*Задача 3.8.* Преобразованием Ганкеля последовательности  $\{a_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , называется последовательность  $h_n = H(\{a_n\})$ , состоящая из определителей

$$h_n = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Например, первые члены преобразования Ганкеля последовательности Каталана  $1, 1, 2, 5, \dots, \text{Cat}_n, \dots$  равны

$$|1| = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 1.$$

Докажите, что преобразование Ганкеля переводит а) последовательность Каталана в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$ ; б) последовательность Каталана, начинающуюся с члена с номером 1, в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$ ; в) последовательность Моцкина  $1, 1, 2, 4, \dots, m_n, \dots$  (см. задачу 3.5) в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$  г) Найдите преобразование Ганкеля последовательности Моцкина  $1, 2, 4, \dots, m_{n+1}, \dots$ , начинающейся с члена с номером 1.

*Задача 3.9.* Полимино (см. задачу 2.27) называется параллелограммным, если его граница представляет собой объединение двух ломаных, идущих вправо и вверх из общего левого нижнего конца в общий правый верхний конец, см. рис. 3.11. Докажите, что число параллелограммных полимино периметра  $2n + 2$  равно числу Каталана  $\text{Cat}_n$ .

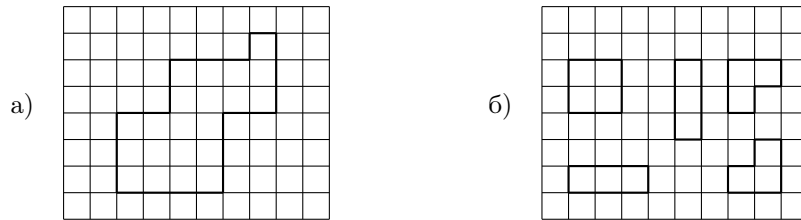


Рис. 3.11: а) Параллелограммное полимино б) Пять параллелограммных полимино периметра 8

*Задача 3.10.* Докажите, что производящая функция для чисел Каталана допускает следующее разложение:

$$\text{Cat}(s) = 1 + \frac{s}{1-4s} - \frac{2s^2}{(1-4s)^2} + \frac{5s^3}{(1-4s)^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} \text{Cat}_n s^n}{(1-4s)^n} + \dots$$

*Задача 3.11.* Рассмотрим множество путей на плоскости, состоящих из векторов  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Найдите производящую функцию для числа таких путей длины  $n$ , начинающихся в 0 и несамопересекающихся (т.е. векторы  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$  не могут идти непосредственно друг за другом).

*Задача 3.12.* Найдите произведение Адамара производящей функции для чисел Каталана и производящих функций а)  $\frac{1}{1-s}$ ; б)  $\frac{1}{(1-s)^2}$ ; в)  $\frac{1}{(1-s)^3}$ .

## Глава 4

# Производящие функции нескольких переменных

Понятие производящей функции естественным образом распространяется на функции нескольких переменных. Производящие функции двух переменных отвечают двухиндексным последовательностям. Такие последовательности удобно записывать в виде треугольника (соответствующего положительному квадранту целочисленной решетки).

### 4.1 Треугольник Паскаля

*Треугольник Паскаля* изображен на рис. 4.1. Элементы этого треугольника перечисляют пути, идущие из его вершины в соответствующую клетку. Пути имеют вид ломаных, составленных из векторов единичной длины двух видов: идущих вправо-вниз и идущих влево-вниз.

Числа, стоящие в треугольнике Паскаля, — это уже хорошо знакомые нам биномиальные коэффициенты

$$c_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Это несложно доказать индукцией по  $n$ . Предположим, что числа в  $n$ -й строчке треугольника совпадают с коэффициентами разложения многочлена  $(1+s)^n$ . Число различных путей, ведущих в точку  $(n+1, k)$ , равно сумме числа путей, ведущих в точку  $(n, k-1)$ , и числа путей, ведущих в точку  $(n, k)$ ,  $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}$ . Поэтому число  $c_{n+1,k}$  совпадает с коэффициентом при  $s^k$  в многочлене  $(1+s) \cdot (1+s)^n = (1+s)^{n+1}$ .

Производящая функция может быть сопоставлена треугольнику Паскаля несколькими способами. Например, можно рассмотреть производящую

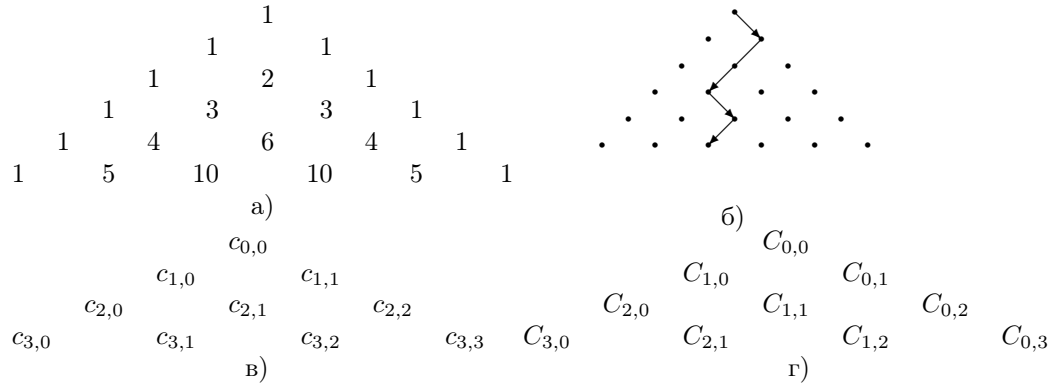


Рис. 4.1: Треугольник Паскаля а), пути, которые он перечисляет б) и возможные нумерации его элементов в), г)

функцию

$$\begin{aligned} \sum_{n,k=0}^{\infty} c_{n,k} x^k y^n &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}. \end{aligned}$$

Второй способ соответствует нумерации элементов треугольника числом отрезков каждого типа на путях, ведущих в соответствующую точку (рис. 4.1 г)). Для этой нумерации

$$C_{n,m} = c_{n+m,m} = \binom{n+m}{m},$$

и производящая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m} x^n y^m &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \binom{n+m}{n} x^n y^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}. \end{aligned}$$

На этот раз она оказалась симметричной по переменным  $x$  и  $y$ .

И, наконец, имеется еще один способ: сопоставить треугольнику Паскаля экспоненциальную производящую функцию. Экспоненциальная произ-

водящая функция отличается от обычной тем, что в качестве коэффициентов степенного ряда берутся не элементы последовательности  $a_n$ , а числа  $a_n/n!$ . Экспоненциальные производящие функции заслуживают отдельного обсуждения, к которому мы сейчас и переходим.

## 4.2 Экспоненциальные производящие функции

Зафиксируем произвольную последовательность  $\{\alpha_n\}$ . Каждой последовательности  $\{a_n\}$  мы можем сопоставить производящую функцию

$$\{a_n\} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n s^n,$$

определяемую последовательностью  $\{\alpha_n\}$ . Если в последовательности  $\{\alpha_n\}$  отсутствуют нулевые элементы, то такое сопоставление взаимно однозначно. До сих пор мы пользовались только обычными производящими функциями — отвечающими последовательности  $\alpha_n \equiv 1$ . В зависимости от преследуемых целей пользу могут принести и другие последовательности. Чаще всего используется последовательность  $\alpha_n = \frac{1}{n!}$ . Соответствующие ей производящие функции называются *экспоненциальными*.

Чем отличаются экспоненциальные производящие функции от обычных? Посмотрим на поведение экспоненциальных производящих функций при выполнении операций над ними. Сумма ведет себя обычным образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n + b_n)}{n!} s^n,$$

а вот произведение иначе:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} s + \frac{a_2}{2!} s^2 + \dots \right) \left( \frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!} s + \frac{b_2}{2!} s^2 + \dots \right) \\ &= \frac{a_0 b_0}{0! 0!} + \left( \frac{a_0 b_1}{0! 1!} + \frac{a_1 b_0}{1! 0!} \right) s + \left( \frac{a_0 b_2}{0! 2!} + \frac{a_1 b_1}{1! 1!} + \frac{a_2 b_0}{2! 0!} \right) s^2 + \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\frac{c_n}{n!}$  произведения вычисляются по формуле

$$c_n = \binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a_n b_0.$$

Еще одно существенное отличие экспоненциальных производящих функций от обычных наблюдается при взятии производных (и интегрировании). Дифференцирование или интегрирование экспоненциальной производящей функции приводит к сдвигу последовательности ее коэффициентов без изменения их величины:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} s + \frac{a_2}{2!} s^2 + \dots \right)' &= \frac{a_1}{0!} + \frac{a_2}{1!} s + \frac{a_3}{2!} s^2 + \dots ; \\ \int \left( \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} s + \frac{a_2}{2!} s^2 + \dots \right) &= \frac{a_0}{1!} s + \frac{a_1}{2!} s^2 + \frac{a_2}{3!} s^3 + \frac{a_3}{4!} s^4 + \dots \end{aligned}$$

Обычная производящая функция  $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$  выражается через экспоненциальную  $\mathcal{A}(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \dots$  по формуле

$$A(s) = \int_0^\infty e^{-t} \mathcal{A}(st) dt.$$

Действительно,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^k dt = - \int_0^\infty t^k de^{-t} = \int_0^\infty e^{-t} dt^k = k \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt = \dots = k!.$$

Теперь мы можем выписать экспоненциальную производящую функцию для треугольника Паскаля:

$$\sum_{n,m=0}^\infty \frac{1}{(n+m)!} \binom{n+m}{m} x^n y^m = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

### 4.3 Треугольник Дика

Треугольник Дика перечисляет пути в положительном квадранте плоскости, выходящие из начала координат и составленные из векторов  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$  (см. рис. 4.2). Пути, оканчивающиеся на оси абсцисс, — это пути Дика из раздела 3.3.

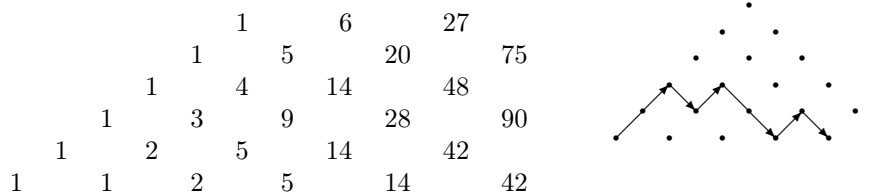


Рис. 4.2: Треугольник Дика и пути, которые он перечисляет

Нетрудно видеть, что элементы  $d_{ij}$  треугольника Дика отличны от нуля в том и только в том случае, если  $i \geq j$  и  $i + j$  четно. Обозначим через  $D(x, y)$  производящую функцию Дика двух переменных

$$D(x, y) = \sum_{i,j=0}^\infty d_{ij} x^i y^j.$$

Правило построения треугольника Дика подсказывает нам уравнение на эту производящую функцию

$$xyD(x, y) + (D(x, y) - D(x, 0)) \frac{x}{y} = D(x, y) - 1.$$



Действительно, коэффициент при любом мономе  $x^i y^j$ , отличном от единичного, представляет собой сумму коэффициентов при мономах  $x^{i-1} y^{j-1}$  и  $x^{i-1} y^{j+1}$ . Функция

$$D(x, 0) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2}$$

нам хорошо известна, и ряд  $D(x, y)$  находится решением линейного уравнения,

$$D(x, y) = \frac{1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2xy}}{1 - x(y + \frac{1}{y})}.$$

Мы знаем, что коэффициенты разложения правой части по степеням переменной  $x$  являются многочленами от  $y$ , хотя из формулы это совершенно не очевидно.

### 4.4 Треугольник Бернулли–Эйлера и перечисление up-down перестановок

Треугольник Бернулли–Эйлера (рис. 4.3), как и треугольник Паскаля, обладает многими замечательными свойствами. Левая сторона этого треугольника называется *стороной Бернулли*, правая — *стороной Эйлера*<sup>1</sup>.

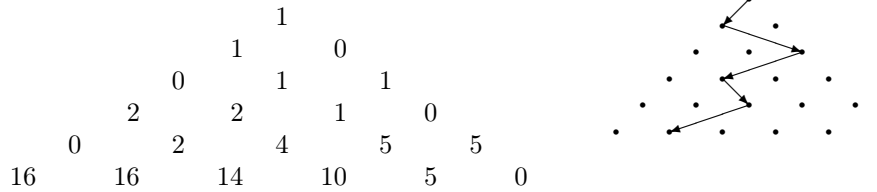


Рис. 4.3: Треугольник Бернулли–Эйлера и пути, которые он перечисляет

Элементы треугольника Бернулли–Эйлера — тоже числа путей из вершины треугольника в данную клетку. Но при этом рассматриваются только пути, идущие зигзагом: нечетные шаги влево, четные — вправо. Поэтому каждое число в треугольнике Бернулли–Эйлера равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева или справа от него, в зависимости от четности строки.

Можно дать и более простое индуктивное правило определения чисел в треугольнике Бернулли–Эйлера, если чередовать знаки через каждые две строчки (см. рис. 4.4). В таком альтернированном треугольнике каждый

<sup>1</sup>Отметим, что есть еще две последовательности чисел, которые также носят имена Бернулли и Эйлера.

элемент равен сумме двух ближайших элементов, стоящих справа и справа сверху от него. Для того чтобы однозначно задать треугольник, необходимо доопределить сторону Эйлера, чем мы сейчас и займемся.

				1				
				1	0			
			-0	-1	-1			
		-2	-2	-1	0			
	0	2	4	5	5			
16	16	14	10	5	0			
0	-16	-32	-46	-56	-61	-61		

Рис. 4.4: Альтернированный треугольник Бернулли–Эйлера

Нам понадобится еще одна интерпретации треугольника Бернулли–Эйлера — в терминах up-down перестановок.

**Определение 4.4.1.** Перестановка на множестве  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  называется *пилообразной*, или *up-down* перестановкой, если каждый элемент в ней либо больше, либо меньше обоих своих соседей.

Например, перестановка  $(3, 2, 7, 1, 6, 4, 5)$  — пилообразная. Вот все пилообразные перестановки для  $n = 2, 3, 4, 5$ , в которых последний элемент меньше своего левого соседа (а значит, первый элемент больше своего правого соседа, если  $n$  четно, и меньше его, если  $n$  нечетно):

(2, 1)  
 (1, 3, 2) (2, 3, 1)  
 (2, 1, 4, 3) (3, 1, 4, 2) (3, 2, 4, 1) (4, 1, 3, 2) (4, 2, 3, 1)  
 (1, 3, 2, 5, 4) (1, 4, 2, 5, 3) (1, 4, 3, 5, 2) (1, 5, 2, 4, 3) (1, 5, 3, 2, 4) (2, 3, 1, 5, 4)  
 (2, 4, 1, 5, 3) (2, 4, 3, 5, 1) (2, 5, 1, 4, 3) (2, 5, 3, 4, 1) (3, 4, 1, 5, 2) (3, 4, 2, 5, 1)  
 (3, 5, 1, 4, 2) (3, 5, 2, 4, 1) (4, 5, 1, 3, 2) (4, 5, 2, 3, 1)

Тем самым, последовательность, перечисляющая пилообразные перестановки, последний элемент в которых меньше своего левого соседа, начинается так:  $1, 1, 2, 5, 16, \dots$ . Это в точности те числа, которые стоят по сторонам треугольника Бернулли–Эйлера: числа с четными номерами — ненулевые элементы стороны Бернулли, а числа с нечетными номерами — ненулевые элементы стороны Эйлера. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие пилообразные перестановки, в которых последний элемент меньше своего левого соседа, и не будем это специально оговаривать, называя их просто пилообразными перестановками.

Чтобы понять, откуда берется связь с треугольником Бернулли–Эйлера, рассмотрим пилообразные перестановки, первый элемент в которых равен  $k$ .

**Лемма 4.4.2.** Пусть  $c_{n,k}$  — число *up-down* перестановок на множестве  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ , начинающихся с  $n+1-k$ . Тогда  $c_{n,k}$  есть  $k$ -е число в  $n$ -й строке треугольника Бернулли–Эйлера.

Например, как видно из предыдущего списка, среди пилообразных перестановок пяти элементов 5 начинаются с 1, еще 5 — с двойки, 4 — с тройки, 2 — с четверки и ни одна не начинается с пятерки. Строка 0, 2, 4, 5, 5 совпадает с четвертой строкой треугольника Бернулли–Эйлера.

**Доказательство.** Для первых двух строк треугольника утверждение проверяется непосредственно. Докажем, что если оно верно для  $n$ -й строки, то оно верно и для строки с номером  $n+1$ . Пусть, для определенности,  $n+1$  чётно. Тогда  $n$  и  $n+2$  нечётны; мы изучаем перестановки из  $n+1$  элементов. Первый элемент в такой перестановке является локальным максимумом, второй — минимумом, поэтому второй элемент меньше первого.

Отбрасывание первого элемента в перестановке после перенумерации остальных элементов с сохранением их относительного порядка даёт однозначно определённую *up-down* перестановку на множестве из  $n$  элементов. Наоборот, по каждой пилообразной перестановке множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , первый элемент в которой равен  $l < k$ , можно построить пилообразную перестановку множества  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ , первый элемент в которой равен  $k$ : допишем  $k$  слева и увеличим на 1 все элементы  $k, k+1, \dots, n$ .

Таким образом,

$$c_{n+1,k} = c_{n,k} + c_{n,k+1} + \dots + c_{n,n}.$$

Для строки с нечётным номером справедливо аналогичное рассуждение. Тем самым, числа  $c_{n,k}$  удовлетворяют тем же соотношениям, что и элементы треугольника Бернулли–Эйлера, а значит, именно они и стоят в этом треугольнике.  $\square$

Выведем теперь производящие функции для сторон треугольника Бернулли–Эйлера. Рассмотрим по отдельности два случая:

- $n$  нечётно; соответствующее число *up-down* перестановок обозначим через  $b_n$  и введём экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{B}(x) = \frac{b_1}{1!}x + \frac{b_2}{2!}x^2 + \dots = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \dots;$$

- $n$  чётно; соответствующее число *up-down* перестановок обозначим через  $e_n$  и введём экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{E}(y) = 1 + \frac{e_1}{1!}y + \frac{e_2}{2!}y^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{5}{4!}y^4 + \dots.$$

Выведем рекуррентную формулу для числа *up-down* перестановок. Максимальный элемент в пилообразной перестановке разделяет ее на две перестановки, каждая из которых является пилообразной — нужно лишь перенумеровать элементы в левой и правой части перестановки, сохраняя их

относительный порядок. Например,

$$(2, 7, 3, 9, 1, 6, 5, 8, 4) \mapsto ((2, 7, 3), (1, 6, 5, 8, 4)) \mapsto ((1, 3, 2), (1, 4, 3, 5, 2)).$$

В результате мы сопоставили каждой пилообразной перестановке на множестве из  $n + 1$  элементов две пилообразные перестановки на множестве из  $k$  и из  $n - k$  элементов,  $n - k$  нечетно.

При нечетном  $n$  получаем рекуррентное соотношение на числа  $b_n$ :

$$b_{n+1} = \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{n}{k} b_k b_{n-k}. \quad (4.1)$$

Биномиальный коэффициент возникает из-за того, что при склеивании двух up-down перестановок мы должны всеми возможными способами распределить номера по левой и правой частям перестановки, т.е. выбрать из  $n$  номеров те, которые соответствуют левой перестановке.

Вспоминая, что для экспоненциальных производящих функций правая часть соответствует квадрату производящей функции  $\mathcal{B}(x)$ , а левая — ее же производной, перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\mathcal{B}'(x) = \mathcal{B}^2(x) + 1. \quad (4.2)$$

Нетрудно проверить, что у этого уравнения есть единственное решение, разложение которого начинается с  $\mathcal{B}(x) = x + \dots$ . Такое решение мы знаем — это тангенс, поскольку  $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$ .

Таким образом, сторона Бернулли определяет разложение в ряд тангенса:

$$\mathcal{B}(x) = \operatorname{tg} x = x + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} + 272\frac{x^7}{7!} + \dots$$

Коэффициенты  $b_n$  в разложении тангенса называются *тангенциальными числами*. Обратите внимание на то, что единица в вершине треугольника не включается в сторону Бернулли.

*Замечание 4.4.3.* Уравнение (4.2) несложно и решить непосредственно. Вспомнив, что  $\mathcal{B}'(x) = d\mathcal{B}/dx$ , имеем

$$\frac{d\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2 + 1} = dx \Rightarrow \int \frac{d\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2 + 1} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arctg} \mathcal{B} = x \Rightarrow \mathcal{B} = \operatorname{tg} x.$$

Если же  $n$  четно, то рекуррентное соотношение принимает вид

$$e_{n+1} = \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{n}{k} e_k b_{n-k}, \quad (4.3)$$

и ему соответствует уравнение

$$\mathcal{E}'(y) = \mathcal{E}(y)\mathcal{B}(y) \quad (4.4)$$

на производящие функции. Решая последнее уравнение, получаем

$$\frac{\mathcal{E}'(y)}{\mathcal{E}(y)} = \mathcal{B}(y) \Rightarrow (\ln \mathcal{E}(y))' = \operatorname{tg} y \Rightarrow \ln \mathcal{E}(y) = \int \operatorname{tg} y \Rightarrow \mathcal{E}(y) = \frac{1}{\cos y},$$

и сторона Эйлера определяет разложение в ряд секанса. Коэффициенты  $e_n$  этого разложения называются *числами Эйлера*<sup>2</sup>.

Воспользовавшись подстановкой

$$\sin x = (e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x})/2\sqrt{-1}, \quad \cos x = (e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x})/2,$$

мы можем переписать производящие функции сторон для альтернированного треугольника в виде

$$\tilde{\mathcal{B}}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \tilde{\mathcal{E}}(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}}.$$

Теперь у нас есть все необходимое для вычисления экспоненциальной производящей функции альтернированного треугольника Бернулли–Эйлера. Обозначим через  $\operatorname{be}_{k,l}$  элемент треугольника, имеющий координату  $k$  вдоль стороны Бернулли и координату  $l$  вдоль стороны Эйлера.

**Теорема 4.4.4.** *Экспоненциальная производящая функция для треугольника Бернулли–Эйлера имеет вид*

$$\operatorname{BE}(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \operatorname{be}_{k,l} \frac{x^k y^l}{k! l!} = \frac{2e^x}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}. \quad (4.5)$$

**Доказательство.** Докажем, что экспоненциальная производящая функция для треугольника Бернулли–Эйлера удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\operatorname{BE}(x, y) + \frac{\partial \operatorname{BE}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{BE}(x, y)}{\partial x}.$$

Записанное выше равенство есть не что иное, как правило образования альтернированного треугольника. Действительно, рассмотрим прямую в треугольнике, параллельную стороне Эйлера. Дифференцирование по  $y$  экспоненциальной производящей функции этой прямой есть сдвиг на единицу вдоль стороны Эйлера. Суммируя результат дифференцирования с исходной функцией, мы получаем соседнюю прямую (поскольку  $\operatorname{be}_{k,m} = \operatorname{be}_{k-1,m} + \operatorname{be}_{k-1,m+1}$ ), т.е. результат дифференцирования по  $x$  исходной экспоненциальной производящей функции.

Таким образом, функция  $\operatorname{BE}(x, y)$  однозначно определяется своим начальным значением

$$\operatorname{BE}(0, y) = \tilde{\mathcal{E}}(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

и дифференциальным уравнением. Для доказательства теоремы осталось только проверить, что функция (4.5) удовлетворяет выписанному дифференциальному уравнению.  $\square$

<sup>2</sup>Обычно числами Эйлера называют числа, стоящие на стороне Эйлера в альтернированном треугольнике (т.е. числа, знак которых меняется). Мы, однако, позволим себе не проводить различия между этими двумя последовательностями.



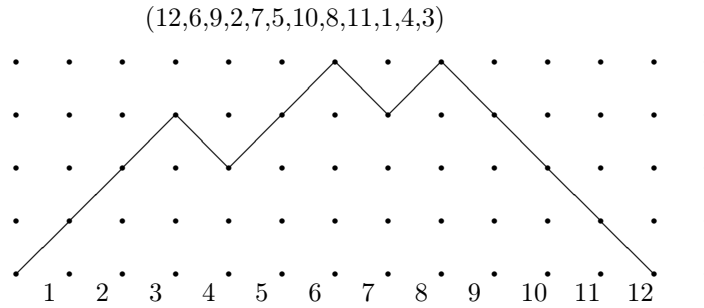


Рис. 4.6: Путь Дика, отвечающий пилообразной перестановке

Рассуждение для случая, когда последний элемент  $m$  — минимум, проводится аналогично, только нужно выбирать соседний справа максимум и идти по перестановке справа налево, а не слева направо.

### 4.6 Производящая функция для треугольника Дика с кратностями

Обозначим элементы треугольника Дика с кратностями с рис. 4.5 через  $g_{n,k}$ , где индекс  $n$  отвечает горизонтальной оси координат, а индекс  $k$  — вертикальной. Рассмотрим производящую функцию для взвешенного треугольника Дика, экспоненциальную по горизонтальной переменной и обычную по вертикальной:

$$\mathcal{G}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} t^k \frac{s^n}{n!} = 1 + t \frac{s}{1!} + (1+2t^2) \frac{s^2}{2!} + (5t+6t^3) \frac{s^3}{3!} + (5+28t^2+24t^4) \frac{s^4}{4!} + \dots$$

Правило образования треугольника Дика с кратностями переписывается как следующее рекуррентное соотношение для элементов треугольника:

$$g_{n+1,k} = k g_{n,k-1} + (k+1) g_{n,k+1}. \tag{4.6}$$

В свою очередь, это рекуррентное соотношение на языке производящих функций принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} = t \mathcal{G} + (1+t^2) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}. \tag{4.7}$$

Единственным решением уравнения (4.7), удовлетворяющим начальному условию  $\mathcal{G}(0, t) = 1$ , является функция

$$\mathcal{G}(s, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2} \cos(s + \arctg(t))}, \tag{4.8}$$

которая и есть искомая производящая функция для взвешенного треугольника Дика.

## 4.7 Задачи

*Задача 4.1.* Докажите, что производящая функция для многочленов Чебышева  $T_n$ , определяемых формулой  $\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi)$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} T_n(x)t^n &= \frac{1-tx}{1-2tx+t^2} \\ &= 1 + xt + (2x^2 - 1)t^2 + (4x^3 - 3x)t^3 + (8x^4 - 8x^2 + 1)t^4 + \dots \end{aligned}$$

*Задача 4.2.* Найдите производящую функцию от двух переменных для треугольника Моцкина (см. задачу 3.3).

*Задача 4.3.* Экспоненциальные производящие функции для целочисленных последовательностей называются *функциями Гурвица*. Докажите, что

- а) сумма и произведение двух функций Гурвица является функцией Гурвица;
- б) производная и интеграл функции Гурвица является функцией Гурвица;
- в) результат подстановки функции Гурвица в функцию Гурвица является функцией Гурвица.

*Задача 4.4.* Пусть последовательность  $\{a_n\}$ , начинающаяся с чисел  $1, 1, 2, 5, 17, 73, \dots$  определена условиями

$$a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2, \quad a_{n+1} = (n+1)a_n - \binom{n}{2}a_{n-2}, \quad n > 1.$$

Докажите, что экспоненциальная производящая функция  $A(s)$  для этой последовательности удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-s)A'(s) = \left(1 - \frac{1}{2}s^2\right)A(s)$$

и имеет вид

$$A(s) = (1-s)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}}.$$

*Задача 4.5.* Найдите производящую функцию  $D(s, t) = \sum d_{n,k} s^n t^k$ , где  $d_{n,k}$  — число путей Дика длины  $n$ , высота которых не превышает  $k$ .

*Задача 4.6.* Проверьте, что функция (4.8) действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.7).

*Задача 4.7.* Докажите, что последовательность чисел в основании треугольников Дика и Моцкина с кратностями зависит лишь от произведения кратностей восходящего и нисходящего ребер в каждой строке, но не от того, как это произведение распределено по восходящему и нисходящему ребру.



*Задача 4.8.* Докажите, что следующие распределения кратностей по ребрам в треугольниках Дика и Моцкина приводят к указанным последовательностям в его основании и найдите производящие функции от двух переменных для каждого из этих треугольников:

- а) Если на восходящих ребрах в  $k$ -ой строке стоит  $k$ , а на нисходящих  $k + 1$ , то в основании треугольника стоят числа Бернулли;
- б) Если на восходящих ребрах в  $k$ -ой строке стоит 1, а на нисходящих  $k$ , то в основании треугольника стоят числа факториалы нечетных чисел,  $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$ ;
- в) Если на восходящих и горизонтальных ребрах в  $k$ -ой строке треугольника Моцкина стоит 1, а на нисходящих  $k$ , то в основании треугольника стоят числа  $I_n$  — число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из  $n$  элементов,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 4$ ,  $I_4 = 10$ , ...;
- г) Если на восходящих и нисходящих ребрах в  $k$ -ой строке треугольника Моцкина стоит  $k$ , а на горизонтальных  $2k$ , то в основании треугольника стоят числа  $(n + 1)!$ ;
- д) Если на восходящих и нисходящих ребрах в  $k$ -ой строке треугольника Моцкина стоит  $k$ , а на горизонтальных  $2k - 1$ , то в основании треугольника стоят числа  $n!$ .

*Задача 4.9.* Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$$h(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 s + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 s^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 s^3 + \dots$$

Докажите, что

$$s(1 - s)h''(s) + (1 - 2s)h'(s) - \frac{1}{4}h(s) = 0.$$

*Задача 4.10.* Докажите, что степенной ряд

$$y(s) = 1 + \frac{2s}{1!} + \frac{6s^2}{2!} + \frac{20s^3}{3!} + \dots + \binom{2n}{n} \frac{s^n}{n!} + \dots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$sy'' + (1 - 4s)y' - 2y = 0.$$

*Задача 4.11.* Докажите, что производящая функция  $y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k!s^k$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$s^2y'' + (3s - 1)y' + y = 0.$$

*Задача 4.12.* Решите относительно  $y$  дифференциальное уравнение

$$y' = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y.$$

*Задача 4.13.* Докажите, что функция  $y(s) = \frac{\arcsin s}{(1-s^2)^{1/2}}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - s^2)y' - sy = 1$$

и найдите последовательность ее коэффициентов.

*Задача 4.14.* Выпишите дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет функция

$$e^{s^2/2} \int e^{-s^2/2},$$

и найдите последовательность ее коэффициентов.

*Задача 4.15.* Докажите, что  $n$ -й многочлен Чебышева  $y = T_n(x)$  (см. задачу 4.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

## Глава 5

# Теневое исчисление

Разложение бинома

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

(см. п. 1.1) можно интерпретировать как свойство последовательности степеней  $x^0, x^1, x^2, \dots$ . Оказывается, эта последовательность — не единственная последовательность с таким свойством. Например, если мы рассмотрим последовательность многочленов

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

(“нисходящие факториалы”), то для нее также

$$(x + y)_n = \binom{n}{0}(x)_n + \binom{n}{1}(x)_{n-1}(y)_1 + \binom{n}{2}(x)_{n-2}(y)_2 + \dots + \binom{n}{n}(y)_n$$

(проверьте!). Последовательности многочленов с таким поведением называются *биномиальными*, их много, и многие из них оказываются очень интересными. Долгое время наличие у биномиальных последовательностей многочисленных общих свойств воспринималось как нечто таинственное и необъяснимое, почему их изучение и было названо *umbral calculus*, т.е. *теневое исчисление*. Работы Рота в 60-х годах прошлого века сорвали с теневого исчисления покров тайны, однако не уменьшили интерес к биномиальным последовательностям, поскольку они регулярно возникают в самых разных областях математики.

### 5.1 Определения и примеры

Итак, нас интересуют *биномиальные последовательности*, т.е. последовательности многочленов

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots,$$

в которых  $p_0(x) = 1$ , степень многочлена  $p_n(x)$  равна  $n$  и старший коэффициент (т.е. коэффициент при  $x^n$ ) в многочлене  $p_n$  равен 1, причем такие, что

$$p_n(x+y) = \binom{n}{0} p_n(x) p_0(y) + \binom{n}{1} p_{n-1}(x) p_1(y) + \binom{n}{2} p_{n-2}(x) p_2(y) + \dots + \binom{n}{n} p_0(x) p_n(y). \quad (5.1)$$

Помимо уже упомянутых последовательностей степеней и нисходящих факториалов биномиальными также являются

- последовательность восходящих факториалов

$$(x)^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1);$$

- последовательность Абеля

$$A_n(x) = x(x+n)^{n-1}.$$

Доказательство последнего утверждения составляет содержание задачи 5.2, мы же пока посмотрим, как использовать биномиальность.

## 5.2 Применения биномиальных последовательностей

Зная, что какая-то последовательность многочленов  $p_n(x)$  биномиальна, мы можем, подставляя в определяющее соотношение (5.1) для этой последовательности различные числовые значения, получать интересные числовые тождества.

В качестве примера докажем следующее *тождество Абеля*:

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{\substack{k, m \geq 1 \\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-1} m^{m-1}. \quad (5.2)$$

Например, при  $n = 7$  тождество Абеля принимает вид

$$2 \cdot 6 \cdot 7^5 = 7 \cdot 1^0 \cdot 6^5 + 21 \cdot 2^1 \cdot 5^4 + 35 \cdot 3^2 \cdot 4^3 + 35 \cdot 4^3 \cdot 3^2 + 21 \cdot 5^4 \cdot 2^1 + 7 \cdot 6^5 \cdot 1^0.$$

Красота тождества объясняется его полной неожиданностью — все слагаемые в правой части равенства делятся лишь на первую степень простого числа 7, тогда как их сумма делится на очень высокую (пятую) степень семерки.

Чтобы доказать тождество Абеля, выпишем условие биномиальности последовательности Абеля:

$$(x+y)(x+y+n)^{n-1} = \binom{n}{0}x(x+n)^{n-1} + \binom{n}{1}x(x+n-1)^{n-2}y + \binom{n}{2}x(x+n-2)^{n-3}y(y+2)^1 + \dots \quad (5.3)$$

Сравним коэффициенты при мономе  $xy$  в левой и правой части тождества. Слева мы имеем  $2(n-1)n^{n-2}$ , тогда как коэффициент при  $xy$  справа равен

$$\binom{n}{1}(n-1)^{n-2} \cdot 1^0 + \binom{n}{2}(n-2)^{n-3} \cdot 2^1 + \dots + \binom{n}{n-1}1^0 \cdot (n-1)^{n-2},$$

и тождество Абеля доказано.

Тождество Абеля является первым в серии замечательных комбинаторных тождеств. Сравнивая коэффициенты при различных мономах в (5.3), можно получить другие тождества той же серии.

### 5.3 Биномиальные последовательности и сдвиги

Дифференцирование переводит  $n$ -ю степень переменной  $x$  в ее  $(n-1)$ -ую степень, умноженную на  $n$ :

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Подобные преобразования можно определить для любой последовательности многочленов  $p_0, p_1, p_2, \dots$  переменной  $x$ , таких, что каждый многочлен  $p_k$  имеет степень  $k$  и коэффициент 1 при старшей степени переменной. Любой многочлен степени не выше  $n$  представляется в виде линейной комбинации многочленов  $p_0, p_1, \dots, p_n$ . На пространстве многочленов  $\mathbb{R}[x]$  определен *линейный оператор*

$$\Delta : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x],$$

такой, что

$$\Delta : p_n \mapsto np_{n-1}.$$

Этот оператор определяется последовательностью многочленов  $p_n$ . Для биномиальных последовательностей он оказывается очень интересным (и в этом случае он называется *дельта-оператором* этой последовательности).

Проверим, например, что оператор

$$\frac{1}{1!} \frac{d}{dx} + \frac{1}{2!} \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d}{dx} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left( \frac{d}{dx} \right)^4 + \dots = e^{d/dx} - 1$$

является дельта-оператором для последовательности нисходящих факториалов. Здесь  $1$  в правой части обозначает тождественный оператор, т.е. преобразование, переводящее каждый многочлен в себя. Вспомним, что экспонента дифференцирования является сдвигом:

$$e^{d/dx} p(x) = p(x+1)$$

для любого многочлена  $p$  (см. п. 1.4). В частности, для нисходящих факториалов

$$\begin{aligned} e^{d/dx} (x)_n - (x)_n &= (x+1)_n - (x)_n \\ &= (x+1)x(x-1)\dots(x-n+2) - x(x-1)\dots(x-n+1) \\ &= nx(x-1)\dots(x-n+2) \\ &= n(x)_{n-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$  — дельта оператор для последовательности степеней — и оператор  $e^{\frac{d}{dx}} - 1$  — дельта оператор для последовательности нисходящих факториалов — обладают общим свойством: оба эти оператора перестановочны с действием сдвига,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \delta_a &= \delta_a \frac{d}{dx} \\ (e^{\frac{d}{dx}} - 1) \delta_a &= \delta_a (e^{\frac{d}{dx}} - 1), \end{aligned}$$

где оператор  $\delta_a$  действует на многочленах сдвигом,  $\delta_a : f(x) \mapsto f(x+a)$ . Действительно, проверить это утверждение для дифференцирования несложно:

$$\frac{d}{dx} \delta_a x^n = \frac{d}{dx} (x+a)^n = n(x+a)^{n-1} = \delta_a n x^{n-1} = \delta_a \frac{d}{dx} x^n.$$

А значит, оно справедливо и для любого ряда от дифференцирований, в том числе и для ряда  $e^{\frac{d}{dx}} - 1$ .

Оказывается, что свойство перестановочности дельта-оператора со сдвигом является характеристическим для биномиальных последовательностей. А именно, справедлива следующая теорема:

**Теорема 5.3.1.** *Дельта-оператор последовательности многочленов перестановочен со сдвигом если и только если соответствующая ему последовательность многочленов биномиальна.*

**Доказательство.** Проверим, что дельта-оператор биномиальной последовательности перестановочен со сдвигом. Поскольку члены  $p_0, p_1, p_2, \dots$  этой последовательности образуют базис в пространстве многочленов, нам достаточно проверить выполнение равенств  $\Delta \delta_a p_n = \delta_a \Delta p_n$  для любой по-

стоянной  $a$  и для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Delta \delta_a p_n(x) &= \Delta p_n(x+a) \\ &= \Delta \left( \binom{n}{0} p_n(x) p_0(a) + \binom{n}{1} p_{n-1}(x) p_1(a) + \dots + \binom{n}{n} p_0(x) p_n(a) \right) \\ &= \binom{n}{0} n p_{n-1}(x) p_0(a) + \binom{n}{1} (n-1) p_{n-2}(x) p_1(a) + \dots + \binom{n}{n-1} p_0(x) p_{n-1}(a) \\ &= n \left( \binom{n-1}{0} p_{n-1}(x) p_0(a) + \binom{n-1}{1} p_{n-2}(x) p_1(a) + \dots + \binom{n-1}{n-1} p_0(x) p_{n-1}(a) \right), \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что

$$\binom{n}{k} (n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k) = n \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = n \binom{n-1}{k}$$

для любого  $k$ . Заключительная правая часть есть не что иное как

$$\delta_a n p_{n-1}(x) = \delta_a \Delta p_n(x),$$

что и требовалось.  $\square$

Мы уже видели, что всякий ряд от дифференцирований перестановочен со сдвигом. Оказывается, справедлива и обратная теорема.

**Теорема 5.3.2.** *Любой оператор, перестановочный со сдвигом и не повышающий степени многочленов, представляется в виде ряда от дифференцирований.*

**Доказательство.** Пусть  $D$  — перестановочный со сдвигом оператор, не повышающий степени многочленов, и пусть его действие на степенях переменной имеет вид

$$\begin{aligned} D1 &= \alpha_0; \\ Dx &= \beta_0 x + \beta_1; \\ Dx^2 &= \gamma_0 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_2; \\ &\dots \end{aligned}$$

Сопоставим ему ряд от дифференцирований

$$\partial = \alpha_0 + \frac{\beta_1}{1!} \frac{d}{dx} + \frac{\gamma_2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots$$

Другими словами,  $\partial$  — такой ряд от дифференцирований, что результат применения оператора  $D - \partial$  к многочленам  $x^n$  (а значит, и к любым многочленам) обращается в 0 в точке 0.

Очевидно, что  $(D - \partial)1 = 0$ . Пусть теперь  $n$  — наименьшая степень переменной, для которой многочлен  $(D - \partial)x^n$  не равен тождественно нулю. Поскольку степень многочлена  $x^n - (x+a)^n$  меньше  $n$ , справедливо равенство  $(D - \partial)(x^n - (x+a)^n) = 0$ , т.е.  $(D - \partial)(x+a)^n = (D - \partial)x^n$ . С

другой стороны, ввиду того, что оператор  $D - \partial$  перестановочен со сдвигом,  $(D - \partial)(x + a)^n = (D - \partial)x^n|_{x=x+a}$  при любом  $a$ , т.е. многочлен  $(D - \partial)x^n$  инвариантен относительно сдвига. Но единственные многочлены, инвариантные относительно сдвига, это константы. Поэтому  $(D - \partial)x^n$  — константа. Однако в силу построения ряда  $\partial$  эта константа равна 0, что противоречит предположению, что  $(D - \partial)x^n \neq 0$ . Тем самым, операторы  $D$  и  $\partial$  одинаково действуют на любой степени переменной, а значит совпадают.  $\square$

Из доказанных выше теорем вытекает способ построения всех биномиальных последовательностей. А именно, возьмем произвольный ряд от дифференцирований, не имеющий свободного члена и со старшим коэффициентом 1,

$$D \left( \frac{d}{dx} \right) = \frac{d}{dx} + d_2 \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + d_3 \left( \frac{d}{dx} \right)^3 + \dots$$

Тогда последовательность многочленов  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$ , для которой он является дельта-оператором, биномиальна, и любая биномиальная последовательность многочленов получается таким образом. Биномиальная последовательность многочленов  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$  для данного дельта-оператора  $D(\frac{d}{dx})$  строится следующим образом.

Положим  $p_0 = 1, p_1(x) = x$ . Тогда многочлен  $p_2(x) = x^2 + p_{21}x$  найдется из уравнения

$$Dp_2 = 2p_1,$$

т.е.

$$2d_2 + 2x + p_{21} = 2x,$$

откуда  $p_{21} = -2d_2$ . Аналогичным образом, для нахождения многочлена  $p_3(x)$  необходимо решить уравнение

$$Dp_3 = 3p_2,$$

которое допускает единственное решение, и т.д.

## 5.4 Явное построение биномиальных последовательностей

Процедура построения биномиальных последовательностей с помощью дельта-оператора, описанная в предыдущем разделе, носит рекуррентный характер — чтобы построить многочлен  $p_{n+1}$  необходимо знать многочлен  $p_n$  и решить уравнение  $\Delta p_{n+1} = np_n$ . В этом разделе будет изложен более прямой способ построения биномиальных последовательностей. Исходным материалом для него является логарифм экспоненциальной производящей функции для такой последовательности.

Пусть  $p_0, p_1, p_2, \dots$  — биномиальная последовательность многочленов. Сопоставим этой последовательности экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{P}(x, t) = p_0(x) + p_1(x) \frac{t}{1!} + p_2(x) \frac{t^2}{2!} + p_3(x) \frac{t^3}{3!} + \dots$$



Теперь равенство (5.1) можно переписать в виде

$$\mathcal{P}(x+y, t) = \mathcal{P}(x, t)\mathcal{P}(y, t). \quad (5.4)$$

Действительно, коэффициент при  $t^n$  в левой части последнего равенства равен  $\frac{p_n(x+y)}{n!}$ , а в правой части равен

$$\sum_{k+l=n} \frac{p_k(x)}{k!} \frac{p_l(y)}{l!}.$$

Умножив обе части последнего равенства на  $n!$ , мы получаем в точности равенство (5.1). Тем самым, для того, чтобы найти все биномиальные последовательности многочленов, нам достаточно найти все функции  $\mathcal{P}$  от двух переменных, удовлетворяющие равенству (5.4).

Забудем пока про вторую переменную  $t$  в равенстве (5.4) и будем искать функции  $P$  от одной переменной, такие, что

$$P(x+y) = P(x)P(y) \quad (5.5)$$

для любых значений переменных  $x$  и  $y$ . Но в п. 1.4 мы уже нашли все функции, преобразующие сложение в умножение, — это экспоненты,  $P(x) = e^{cx}$  для некоторой постоянной  $c$ .

Теперь мы можем решить и уравнение (5.4)! Действительно, при любом значении  $t$  функция  $\mathcal{P}(x, t)$  является экспонентой от  $cx$  для некоторой константы  $c$ . Если мы хотим, чтобы в разложении по степеням  $t$  коэффициенты были многочленами от  $x$ , то мы должны положить  $c(0) = 0$ , в остальном эта константа может зависеть от  $t$  произвольным образом, и мы получаем следующее утверждение.

**Теорема 5.4.1.** *Биномиальные последовательности многочленов взаимнооднозначно соответствуют экспоненциальным производящим функциям вида  $\mathcal{P}(x, t) = e^{xc(t)}$ , где  $c = c(t)$  — произвольная функция (ряд) от  $t$ ,  $c(0) = 0$ .*

Тем самым, для построения биномиальной последовательности многочленов достаточно задать последовательность чисел  $c_1, c_2, \dots$  и положить  $p_n(x)$  равным коэффициенту при  $t^n/n!$  в функции

$$\mathcal{P}(x, t) = e^{x(c_1 t + c_2 t^2 + \dots)}.$$

Посмотрим, как выглядят функции  $c(t)$  для некоторых имеющихся у нас примеров биномиальных последовательностей. Степеням  $x^n$  отвечает функция  $c(t) = t$  (т.е.  $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = \dots = 0$ ). Последовательности нисходящих факториалов  $(x)_n$  соответствует функция

$$c(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots = \log(1+t),$$

т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} \frac{t^n}{n!} = e^{x \log(1+t)} = (1+t)^x.$$

Действительно, это утверждение есть не что иное как бином Ньютона:

$$(1+t)^x = 1 + \binom{x}{1}t + \binom{x}{2}t^2 + \binom{x}{3}t^3 + \dots$$

В конце этой главы имеются задачи на нахождение функций  $c(t)$  для других биномиальных последовательностей и на построение биномиальных последовательностей по их функциям  $c(t)$ .

Применим теперь к экспоненциальной производящей функции для биномиальной последовательности дельта-оператор этой последовательности. Получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{P}(x, t) &= 1 \cdot p_0(x) \frac{t^1}{1!} + 2 \cdot p_1(x) \frac{t^2}{2!} + 3 \cdot p_2(x) \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= p_0(x) \frac{t^1}{0!} + p_1(x) \frac{t^2}{1!} + p_2(x) \frac{t^3}{2!} + \dots \\ &= t \mathcal{P}(x, t). \end{aligned}$$

Другими словами, дельта-оператор определяется условием

$$\Delta e^{xc(t)} = t e^{xc(t)}.$$

## 5.5 Последовательности Шеффер

Последовательности Шеффер обобщают биномиальные последовательности. Рассмотрим биномиальную последовательность многочленов  $p_0, p_1, \dots$ .

*Последовательностью Шеффер* для этой биномиальной последовательности  $\{p_n\}$  называется любая последовательность многочленов  $s_0, s_1, \dots$  степеней  $0, 1, 2, \dots$ , удовлетворяющих соотношению

$$s_n(x+y) = \sum_{k+m=n} \binom{n}{k} s_k(x) p_m(y). \quad (5.6)$$

В отличие от определения биномиальной последовательности, здесь в правой части равенства вместо произведений членов самой последовательности стоят произведения членов последовательности Шеффер и соответствующей биномиальной последовательности.

Для последовательности Шеффер  $s_0, s_1, \dots$  введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{S}(x, t) = s_0(x) + s_1(x) \frac{t}{1!} + s_2(x) \frac{t^2}{2!} + s_3(x) \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Тогда равенства (5.6) перепишутся в виде

$$\mathcal{S}(x+y, t) = \mathcal{S}(x, t)\mathcal{P}(y, t). \quad (5.7)$$

Поделив это равенство на равенство (5.4), мы получаем

$$\frac{\mathcal{S}(x+y, t)}{\mathcal{P}(x+y, t)} = \frac{\mathcal{S}(x, t)}{\mathcal{P}(x, t)}.$$

Подстановка  $x = 0$  дает

$$\frac{\mathcal{S}(y, t)}{\mathcal{P}(y, t)} = \frac{\mathcal{S}(0, t)}{\mathcal{P}(0, t)},$$

т.е. отношение функций  $\mathcal{S}(y, t)$  и  $\mathcal{P}(y, t)$  зависит лишь от  $t$ . Обозначив это отношение через  $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$ ,  $a_0 \neq 0$ , заключаем, что

$$\mathcal{S}(x, t) = a(t)\mathcal{P}(x, t) = a(t)e^{xc(t)}.$$

Наоборот, нетрудно видеть, что любая функция такого вида удовлетворяет определяющему соотношению (5.7):

$$\mathcal{S}(x+y, t) = a(t)e^{(x+y)c(t)} = a(t)e^{xc(t)}e^{yc(t)} = \mathcal{S}(x, t)\mathcal{P}(y, t).$$

Последовательности Шеффер, отвечающие  $c(t) = t$ , называются *последовательностями Аппеля*. К их числу относятся многие знаменитые последовательности ортогональных многочленов.

Например, *многочлены Эрмита*  $H_n$  имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{-t^2/2} e^{xt},$$

*многочлены Эйлера*  $E_n$  имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt},$$

*многочлены Бернулли*  $B_n$  имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt}.$$

## 5.6 Коалгебра многочленов

**Теорема 5.6.1.** Пусть  $\{p_n\}, \{q_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  — две биномиальные последовательности. Рассмотрим линейное отображение пространства многочленов в себя, переводящее  $p_n$  в  $q_n$ . Тогда это отображение переводит любую биномиальную последовательность многочленов в биномиальную последовательность.

Смысл этой теоремы в следующем. Введем на пространстве многочленов коумножение  $\mu$ , определенное на базисных мономах следующим образом:

$$\mu : x^n \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}.$$

Это определение естественно: коумножение можно ввести таким же образом на пространстве функций на любой группе. А именно, пусть  $G$  — группа с операцией, которую мы записываем как сложение, и пусть  $\mathcal{F}(G)$  — пространство функций на этой группе (например, с вещественными значениями). Тогда групповое коумножение

$$\mu : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \equiv \mathcal{F}(G \times G)$$

определяется так:

$$\mu(f)(g, h) = f(g + h).$$

В нашем случае группа  $G$  это группа вещественных чисел по сложению, а  $\mathcal{F}(G) = \mathbb{R}[x]$  это пространство многочленов на ней. Разумеется, на пространстве функций на группе можно ввести и структуру алгебры — функции можно перемножать, — однако в данный момент нам эта структура неинтересна.

Биномиальные последовательности многочленов выделяются тем условием, что коумножение действует на них так же, как и на последовательности степеней  $x^n$ :

$$\mu : p_n \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k \otimes p_{n-k}.$$

Всякое линейное отображение, переводящее некоторую биномиальную последовательность в биномиальную последовательность, является изоморфизмом коалгебр. Поэтому оно переводит любую биномиальную последовательность в биномиальную последовательность. Все теневое исчисление есть не что иное как изучение этой коалгебраической структуры.

К сожалению, литературы о теневом исчислении на русском языке практически нет.

## 5.7 Задачи

*Задача 5.1.* Докажите, что последовательность восходящих факториалов биномиальна. Найдите ее дельта-оператор.

*Задача 5.2.* Проверьте равенство

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = n\delta A_{n-1}(x);$$

здесь  $A_n(x)$  — многочлен Абеля с номером  $n$ , а  $\delta$  — оператор сдвига на единицу. Воспользовавшись этим равенством, постройте дельта-оператор для последовательности Абеля, доказав, тем самым, ее биномиальность.

*Задача 5.3.* Придумайте свои примеры биномиальных последовательностей.

*Задача 5.4.* Докажите, что  $p_n(0) = 0$  при всех  $n > 0$  для любой биномиальной последовательности многочленов  $p_n$ .

*Задача 5.5.* Какая биномиальная последовательность соответствует дельта-оператору  $\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$ ?

*Задача 5.6.* Докажите мультиномиальное свойство биномиальных последовательностей:

$$p_n(x_1 + \dots + x_k) = \sum_{m_1 + \dots + m_k = n} \binom{n}{m_1, \dots, m_k} p_{m_1}(x_1) \dots p_{m_k}(x_k),$$

где

$$\binom{n}{m_1, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!}$$

это мультиномиальный коэффициент.

*Задача 5.7.* Используя биномиальность многочленов Абеля, докажите следующие тождества Абеля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n-1)(n+6)n^{n-3} &= \sum_{\substack{k, m \geq 1 \\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-2} m^{m-1} \\ (n-1)(n+6)n^{n-4} &= \sum_{\substack{k, m \geq 1 \\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-2} m^{m-2}. \end{aligned}$$

Придумайте свои тождества Абеля.

*Задача 5.8.* Докажите, что свойство биномиальности последовательности нисходящих факториалов можно записать в виде

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

*Задача 5.9.* Найдите логарифм  $c = c(t)$  экспоненциальной производящей функции для последовательности восходящих факториалов  $(x)^n$ , последовательности многочленов Абеля  $A_n(x) = x(x+an)^{n-1}$  и других известных вам биномиальных последовательностей многочленов.

*Задача 5.10.* Докажите, что если  $c = c(t)$  — логарифм экспоненциальной производящей функции для данной биномиальной последовательности многочленов, то оператор  $c^{-1}(\frac{d}{dx})$  является дельта-оператором для этой последовательности.

*Задача 5.11.* Докажите формулу интерполяции Ньютона: Для любого многочлена  $p$  степени  $N$  и любой точки  $a$  справедливо равенство

$$p(x) = \sum_{k=0}^N \Delta^k [p](a) \frac{(x-a)_k}{k!}.$$

Здесь  $\Delta[p]$  есть результат применения к многочлену  $p$  оператора конечной разности  $\Delta$ :

$$\Delta[p](x) = \delta_1 p(x) - p(x) = p(x+1) - p(x), \quad \Delta^k [p](x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} p(x+i).$$

Например, для  $p = x^2$

$$\Delta^0 [p] = 1, \quad \Delta [p] = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1 \quad \Delta^2 [p] = (x+2)^2 - 2(x+1)^2 + x^2 = 4,$$

и формула интерполяции принимает вид

$$x^2 = a^2 + (2a+1) \frac{(x-a)}{1!} + 2 \frac{(x-a)(x-a-1)}{2!}.$$

Обратите внимание на сходство формулы Ньютона с разложением в ряд Тейлора — оператор конечной разности играет роль дифференцирования, а нисходящие факториалы  $(x-a)_k$  — роль степеней переменной. В связи с этим формулу Ньютона называют также теньвым рядом Тейлора.

*Задача 5.12.* Пусть  $\Delta$  — дельта-оператор, перестановочный со сдвигом, и пусть  $\{p_n\}$  — соответствующая ему биномиальная последовательность. Докажите, что последовательность многочленов  $s_0, s_1, s_2, \dots$  степеней  $0, 1, 2, \dots$  является последовательностью Шеффер для  $\{p_n\}$ , если и только если

$$\Delta s_n = n s_{n-1} \text{ для } n = 1, 2, \dots$$

Здесь, в отличие от биномиальных последовательностей, мы не требуем, чтобы многочлены  $s_n$  принимали значение 0 при  $x = 0$ , т.е. делились бы на  $x$ . В результате каждому дельта-оператору отвечает много последовательностей Шеффер.

*Задача 5.13.* Выпишите несколько первых многочленов Эрмита, Эйлера и Бернулли.

Задача 5.14. Докажите, что многочлены Эрмита имеют вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

Задача 5.15. Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите свойство ортогональности многочленов Эрмита:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx = 0$$

при  $m \neq n$ .

Задача 5.16. Докажите, что

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

Задача 5.17. Докажите, что

$$H_n(x) = e^{-\frac{d^2}{dx^2} x^n}.$$

Задача 5.18. Докажите, что многочлены Бернулли имеют вид

$$B_n(x) = \frac{\frac{d}{dx}}{e^{\frac{d}{dx}} - 1} x^n.$$

Задача 5.19. Докажите, что многочлены Бернулли однозначно определяются условием

$$\int_x^{x+1} B_n(\xi) d\xi = x^n.$$

Другими словами, интеграл на отрезке  $[x, x+1]$  — обратный оператор к дифференциальному оператору из предыдущей задачи.

Задача 5.20. Докажите формулу Фاولьхабера для суммы  $k$ -х степеней начального отрезка натурального ряда:

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}.$$

Задача 5.21. Докажите, что

$$\begin{aligned} B_n(x+1) - B_n(x) &= nx^{n-1} \\ E_n(x+1) - E_n(x) &= 2x^n. \end{aligned}$$

Задача 5.22. Введем на последовательностях многочленов следующую операцию, называемую *теневой композицией*. Пусть  $p = (p_0, p_1, p_2, \dots)$  и  $q = (q_0, q_1, q_2, \dots)$  — две последовательности многочленов, в которых  $\deg p_n = \deg q_n = n$  для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$ ,  $q_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} x^k$ . Определим  $n$ -й член последовательности  $(p \circ q)$  равенством

$$(p \circ q)_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} q_k(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k a_{n,k} b_{k,m} x^m.$$

Очевидно, что последовательность мономов  $e = (1, x, x^2, \dots)$  является единицей относительно этого действия:

$$(p \circ e)_n = (e \circ p)_n = p_n$$

для любой последовательности  $p$ .

Докажите, что множество всех последовательностей Шеффер образуют группу относительно операции теневой композиции. Докажите, что множество всех последовательностей Аппеля образует нормальную коммутативную подгруппу в этой группе, а множество всех биномиальных последовательностей — некоммутативную (и ненормальную) подгруппу в ней. Докажите, что группа всех последовательностей Шеффер является полупрямым произведением этих двух подгрупп.



## Глава 6

# Разбиения

В этой главе мы обсуждаем задачу о числе представлений данного натурального числа в виде суммы натуральных чисел. Характер ответа в этой задаче существенно зависит от того, считаем ли мы различными представления, в которых одни и те же слагаемые идут в разном порядке. Если такие представления считаются различными, то мы получаем простую задачу о перечислении разложений. Она также имеет важную геометрическую интерпретацию — разложения перечисляют количество точек с целочисленными координатами в пространственных фигурах.

При забывании порядка слагаемых мы приходим к гораздо более сложной задаче о перечислении разбиений. Эта задача, в свою очередь, тесно связана с комбинаторикой групп перестановок. Различные ее варианты имеют многочисленные приложения в таких глубоких математических теориях как, например, теория представлений групп.

### 6.1 Разбиения и разложения

Найдем, сколькими способами можно представить число  $n$  в виде суммы неотрицательных слагаемых.

Два представления

$$n = a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_k$$

будем считать различными, если  $a_i \neq b_i$  хотя бы для одного индекса  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Такое представление числа  $n$  будем называть его *разложением*.

**Утверждение 6.1.1.** Число различных разложений числа  $n$  в сумму  $k$  целых неотрицательных слагаемых равно  $\binom{n+k-1}{k-1}$ .

**Доказательство.** Представим себе число  $n$  в виде набора из  $n$  одинаковых шариков, лежащих на прямой. Каждому разложению числа  $n$  в сумму  $k$  слагаемых сопоставим расстановку  $k-1$  палочек между шариками. Палочки занумерованы слева направо числами от 1 до  $k-1$ . Элемент

$a_i$  разложения равен числу шариков между палочками с номерами  $i - 1$  и  $i$ . Вместе палочки и шарики составляют  $n + k - 1$  предмет. При этом назначить  $k - 1$  предмет палочками можно ровно  $\binom{n+k-1}{k-1}$  различными способами. Утверждение доказано.

Несложно выписать и производящую функцию для числа разложений. По сути дела, мы уже сделали это в первой главе.

**Утверждение 6.1.2.** *Производящая функция для числа разложений на  $k$  слагаемых имеет вид*

$$B_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} s^n = (1-s)^{-k}.$$

Сложнее подсчитать число разбиений числа  $n$ . *Разбиением* мы будем называть класс эквивалентности разложений, ни одно из слагаемых в которых не равно нулю. При этом два разложения считаются эквивалентными, если одно можно получить из другого перестановкой слагаемых.

Вот все разбиения маленьких чисел:

$$\begin{array}{llll} n = 1 & 1 & & \\ n = 2 & 2 & =1+1 & \\ n = 3 & 3 & =2+1=1+1+1 & \\ n = 4 & 4 & =3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1 & \\ n = 5 & 5 & =4+1=3+2=3+1+1 & \\ & & =2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1 & \end{array}$$

Обратите внимание на то, что каждое разбиение в таблице записано в порядке убывания слагаемых.

Обозначив число разбиений числа  $n$  через  $p_n$ , получаем таблицу начальных значений последовательности  $p_n$ :

$$\begin{array}{cccccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ p_n & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 15 & 22 \end{array}$$

Наша ближайшая задача — найти производящую функцию для последовательности  $p_n$ . Для этого подсчитаем сначала число разбиений на части, удовлетворяющие некоторым ограничениям. Пусть  $P_1(s)$  — производящая функция для разбиений на части, равные 1. Очевидно, что для каждого числа такое разбиение единственно, поэтому

$$P_1(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \frac{1}{1-s}.$$

Число разбиений числа  $n$  на части, равные 2, равно 1 для четных  $n$  и равно нулю в противном случае. Поэтому

$$P_2(s) = 1 + s^2 + s^4 + s^6 + \dots = \frac{1}{1-s^2}$$

— производящая функция, перечисляющая разбиения на части, равные 2.

Разбиения на части, не превосходящие двух, описываются производящей функцией  $P_1(s)P_2(s)$ . Действительно, коэффициент при  $s^n$  в этом произведении равен количеству представлений числа  $n$  в виде суммы  $n = k_1 + 2k_2$ , т.е. числу разбиений числа  $n$  на  $k_1$  единиц и  $k_2$  двоек. Тем самым, производящая функция для разбиений на части, не превосходящие двух, имеет вид

$$P_1(s)P_2(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)}.$$

Аналогично, разбиения на части, равные трем, перечисляются производящей функцией  $P_3(s) = 1/(1-s^3)$ , а разбиения на части, не превосходящие трех, описываются производящей функцией

$$P_1(s)P_2(s)P_3(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)}.$$

Продолжая это рассуждение, мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 6.1.3** (Эйлер). *Производящая функция для числа разбиений числа  $n$  имеет вид*

$$P(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)(1-s^4)\dots}. \quad (6.1)$$

Для того, чтобы придать утверждению теоремы смысл, необходимо пояснить, что понимается под бесконечным произведением, стоящим в знаменателе правой части равенства (6.1). Это произведение должно быть формальным степенным рядом

$$Q(s) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots = (1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots \quad (6.2)$$

Для того, чтобы сказать, чему равны коэффициенты  $q_0, q_1, q_2, \dots$  бесконечного произведения, посмотрим сначала на конечные произведения:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1-s & = & 1-s & & & & & & \\ (1-s)(1-s^2) & = & 1-s & -s^2 & +s^3 & & & & \\ (1-s)(1-s^2)(1-s^3) & = & 1-s & -s^2 & & +s^4 & +s^5 & -s^6 & \\ (1-s)\dots(1-s^4) & = & 1-s & -s^2 & & & +2s^5 & +\dots & \\ (1-s)\dots(1-s^5) & = & 1-s & -s^2 & & & +s^5 & +\dots & \end{array}$$

Видно, что коэффициенты в этих конечных произведениях “стабилизируются” — начиная с некоторого момента перестают изменяться (стабилизирующиеся члены разложения выделены). Это и неудивительно: умножение на  $1-s^k$  не меняет коэффициентов многочлена при степенях, меньших  $k$ . Поэтому мы можем просто положить  $q_k$  равным коэффициенту при  $s^k$  в многочлене  $(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^k)$ .

Теперь мы можем выписать аналогичные бесконечные произведения и для разбиений с различными ограничениями.

Так, число разбиений на различные слагаемые дается производящей функцией

$$(1 + s)(1 + s^2)(1 + s^3) \dots,$$

производящая функция для разбиений на различные нечетные слагаемые имеет вид

$$(1 + s)(1 + s^3)(1 + s^5) \dots,$$

а разбиения на произвольные нечетные слагаемые перечисляются производящей функцией

$$\frac{1}{(1 - s)(1 - s^3)(1 - s^5) \dots},$$

и т.д.

Разбиения тесно связаны с алгеброй многочленов. Рассмотрим кольцо многочленов  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  от бесконечного числа переменных. Будем считать, что переменной  $x_i$  приписан вес  $i$  и что при перемножении переменных их веса складываются. Будем называть многочлен *взвешенно однородным*, если все входящие в него мономы имеют одинаковый вес. Подсчитаем число мономов веса  $n$ , т.е. размерность пространства взвешенно однородных многочленов веса  $n$ .

При  $n = 1$  такой моном всего один — это моном  $x_1$ . При  $n = 2$  имеется два монома веса  $n$  — это  $x_1^2$  и  $x_2$ . Число мономов веса 3 равно трем, это  $x_1^3$ ,  $x_1x_2$  и  $x_3$ . Вообще, число мономов веса  $n$  равно  $p_n$ . Действительно, каждому моному веса  $n$  можно сопоставить разбиение числа  $n$  по следующему правилу: число слагаемых  $i$  в разбиении равно степени вхождения переменной  $x_i$  в моном. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно.

Вот полезная геометрическая интерпретация разбиений. Каждое разбиение удобно представлять в виде *диаграммы Феррерса* или *диаграммы Юнга* (рис. 6.1). Изображенные на этом рисунке диаграммы соответствуют разбиению  $5 + 4 + 4 + 2 + 1$  числа 16. Каждая строчка диаграммы содержит столько элементов, каково соответствующее слагаемое разбиения.



Рис. 6.1: Диаграммы Феррерса а) и Юнга б)

Используя диаграммы Феррерса или Юнга, можно доказывать различные свойства разбиений. Например, на диаграммах Юнга действует естественная инволюция — отражение относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла вниз и вправо. Некоторые диаграммы при таком отражении переходят в себя (см. рис. 6.2). Такие диаграммы (и соответствующие им разбиения) будем называть *симметричными*.



Рис. 6.2: Симметричная диаграмма Юнга а) и центральные крюки в ней б). Симметричному разбиению  $(5,4,4,3,1)$  сопоставляется разбиение на нечетные слагаемые  $(9,5,3)$

Докажем следующее свойство симметричных разбиений.

**Утверждение 6.1.4.** Число симметричных разбиений числа  $n$  равно числу его разбиений на различные нечетные слагаемые.

**Доказательство.** Для доказательства поставим в соответствие каждой симметричной диаграмме диаграмму, составленную из ее “центральных крюков” (см. рис. 6.2 б)). Такой крюк сопоставляется каждой клетке на главной диагонали диаграммы и состоит из клеток, расположенных правее этой диагональной клетки или ниже нее. Число клеток в каждом центральном крюке симметричной диаграммы нечетно, и эти числа попарно различны. Наоборот, взяв диаграмму, составленную из строк различной нечетной длины, мы можем “слопать” каждую такую строчку посередине и составить из получившихся крюков симметричную диаграмму.

## 6.2 Тождество Эйлера

Производящая функция  $Q$ , задаваемая равенством (6.2), оказывается очень интересной. Эйлер продолжил вычисление ее коэффициентов и получил

$$Q(s) = 1 - s - s^2 + s^5 + s^7 - s^{12} - s^{15} + s^{22} + s^{26} - s^{35} - s^{40} + s^{51} + s^{57} - s^{70} - s^{77} + s^{92} + s^{100} - \dots$$

Видно, что среди коэффициентов в вычисленных членах встречаются только нули, единицы и минус единицы. Ненулевые коэффициенты стоят на некоторых вполне определенных местах, и знаки при единицах попарно чередуются. Эти наблюдения привели Эйлера к гипотезе, которую мы сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 6.2.1** (Тождество Эйлера).

$$Q(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( s^{\frac{3k^2-k}{2}} + s^{\frac{3k^2+k}{2}} \right).$$

**Доказательство.** При раскрытии скобок ряд

$$Q(s) = (1 - s)(1 - s^2)(1 - s^3) \dots$$

содержит те же члены, что и ряд для числа разбиений с различными слагаемыми

$$(1 + s)(1 + s^2)(1 + s^3) \dots$$

Однако некоторые члены при этом входят со знаком плюс, а некоторые со знаком минус. Знак плюс имеют члены, соответствующие разбиениям на четное число слагаемых, а знак минус — члены, отвечающие разбиениям на нечетное число слагаемых. Мы докажем, что число разбиений числа  $n$  на четное и нечетное число слагаемых одинаково для всех значений  $n$  кроме некоторых исключительных.

Представим каждое разбиение в виде диаграммы Юнга. Важную роль в доказательстве будут играть нижняя строчка диаграммы и ее “боковая диагональ” (см. рис. 6.3).

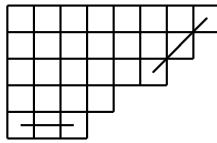


Рис. 6.3: Нижняя строчка и боковая диагональ диаграммы Юнга

Пусть  $l$  — длина нижней строчки,  $d$  — длина диагонали,  $k$  — число строчек в диаграмме, т.е. число слагаемых в разбиении. Определим отображение множества диаграмм, все строчки в которых имеют разную длину, в себя следующим образом:

- если  $l < d$ , то отрезем от диаграммы нижнюю строчку и приклеим ее к диагонали;
- если  $l = d < k$ , то сделаем то же самое;
- если  $l > d$  и  $k > l$ , то наоборот, отрезем диагональ и приклеим ее ниже нижней строчки.

С остальными (исключительными) диаграммами не будем делать ничего.

Наше отображение меняет четность числа строк в диаграмме, т.е. четность числа слагаемых в разбиении, для всех неисклучительных диаграмм. Поэтому если неисклучительных диаграмм с числом клеток  $n$  нет вообще, то коэффициент при  $s^n$  в разложении  $Q(s)$  равен нулю.

Исключительные диаграммы выделяются условиями

$$k = l = d \text{ или } k = d, l = k + 1.$$

В первом случае имеем

$$n = k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (2k - 1) = \frac{3k^2 - k}{2};$$

во втором —

$$n = (k + 1) + (k + 2) + \dots + 2k = \frac{3k^2 + k}{2}.$$

В каждом из этих случаев исключительная диаграмма единственна. Тожество Эйлера доказано.  $\square$

Тожество Эйлера дает эффективный способ вычисления числа разбиений числа  $n$ . Именно, справедливо следующее рекуррентное соотношение.

**Утверждение 6.2.2.**

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - \dots$$

Действительно, это очевидное следствие равенства

$$P(s)Q(s) = 1.$$

Полученное рекуррентное соотношение нашло замечательное применение в “линейке Фукса”<sup>1</sup>.

“Эта формула позволяет быстро составить довольно длинную таблицу чисел  $p_n$ . Вот практический совет, как это сделать. Возьмите лист клетчатой бумаги — лучше всего двойной тетрадный лист. Отрежьте вдоль его длинной стороны полоску шириной 3-4 клетки. Положите эту полоску перед собой вертикально и у левого среза в нижней клетке поставьте какой-нибудь знак, скажем звездочку. Затем, двигаясь вверх, поставьте в первой клетке +, во второй +, в пятой —, в седьмой —, в двенадцатой +, в пятнадцатой + и т.д., насколько хватит длины полоски. Оставшуюся часть листа так же положите перед собой вертикально и, отступя 10-15 клеток от ее левого среза, проведите на ней вертикальную черту — сверху донизу. В клетки, прилегающие к черте слева, двигаясь сверху вниз, впишите известные вам числа  $p_n$ , начиная с  $p_0$ : 1, 1, 2, 3, 5, 7. Чтобы найти следующее значение, приложите отрезанную полоску справа к вертикальной черте так, чтобы звездочка оказалась против первой пустой клетки. Теперь из суммы чисел, стоящих против плюсов, вычитите сумму чисел, стоящих против минусов. Что получится — впишите в клетку против звездочки: это следующее значение функции  $p_n$ . Опустите полоску на одну клетку вниз и повторите то же самое. И так далее. Через несколько минут вы получите колонку чисел  $p_n$  высотой в ваш лист.”

<sup>1</sup>Квант, 8 (1981), с. 15

### 6.3 Разбиения множеств в треугольнике Моцкина с кратностями

Разбиения множеств легче поддаются описанию, чем разбиения чисел.

Рассмотрим множество  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  натуральных чисел от 1 до  $n$ . *Разбиением* множества  $N_n$  называется его представление в виде объединения непустых непересекающихся подмножеств. Например, множество  $N_3$  допускает пять разбиений:

$$\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Число разбиений множества  $N_n$  обозначим через  $\tilde{p}_n$  и займемся изучением производящей функции

$$\tilde{P}(s) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_2 s^2 + \dots$$

(мы полагаем, по определению,  $\tilde{p}_0 = 1$ ).

Каждому разбиению множества  $N_n$  можно естественным образом сопоставить разбиение числа  $n$ . Для этого нужно представить  $n$  в виде суммы количеств элементов в каждом из множеств разбиения. Нетрудно подсчитать и число разбиений множества  $N_n$ , отвечающих данному разбиению

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

числа  $n$ . Элементы первого множества можно выбрать  $\binom{n}{n_1}$  способами; после этого элементы второго множества можно выбрать  $\binom{n-n_1}{n_2}$  способами и т.д. Всего разбить элементы множества  $N_n$  по множествам с  $n_1, n_2, \dots, n_k$  элементами можно

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!} \\ &= \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}. \end{aligned}$$

Полученное выражение называется *мультиномиальным коэффициентом*. Оно обобщает биномиальный коэффициент — число сочетаний. Как нетрудно видеть, мультиномиальный коэффициент представляет собой коэффициент при  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$  в разложении многочлена  $(x_1 + \dots + x_k)^n$ :

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k=0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}}^n \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$



Однако число разбиений множества  $N_n$ , отвечающих данному разбиению числа  $n$ , не совпадает в точности с мультиномиальным коэффициентом. Дело в том, что множества разбиения, содержащие одинаковое количество элементов, можно переставлять между собой. Поэтому правильный ответ имеет вид

$$\frac{1}{m_1! \dots m_n!} \binom{n}{n_1 \dots n_k},$$

где  $m_i$  — это число элементов разбиения, равных  $i$ .

Каждому разбиению множества  $N_n$  на подмножества сопоставим путь в треугольнике Моцкина по следующему правилу. Пусть элемент  $i \in N_n$  входит в некоторое подмножество разбиения. Тогда  $i$ -й отрезок пути будет горизонтальным, если либо соответствующее подмножество состоит из одного элемента  $i$ , либо элемент  $i$  не является в подмножестве ни минимальным, ни максимальным элементом.  $i$ -й отрезок пути будет вектором подъема  $(1, 1)$ , если элемент  $i$  — минимальный в своем подмножестве, и он будет вектором спуска  $(1, -1)$ , если соответствующий элемент максимален. Начальная точка пути находится, как обычно, в точке  $(0, 0)$ . На рис. 6.4 изображены разбиение множества  $N_{10}$  и путь в треугольнике Моцкина, соответствующий этому разбиению.

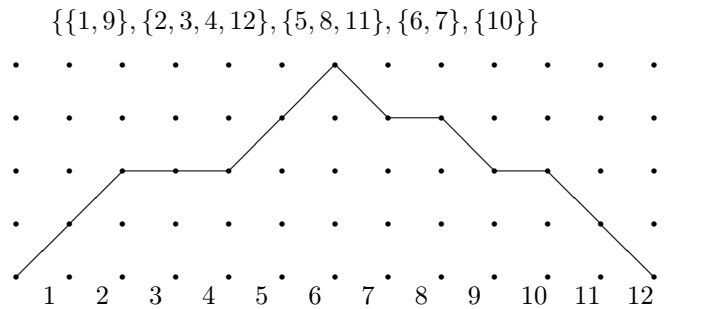


Рис. 6.4: Путь в треугольнике Моцкина, отвечающий разбиению множества

Ясно, что для каждого разбиения путь, отвечающий ему, является правильным: он лежит в положительной полуплоскости и заканчивается на высоте 0. Действительно, среди первых  $m$  элементов множества  $N_n$  число максимумов не может превосходить числа минимумов ни при каком  $m$ .

Подсчитаем, сколько разбиений соответствует данному пути. Пусть начальная часть пути, состоящая из  $i$  отрезков, заканчивается на высоте  $j$ , и предположим, что первые  $j$  элементов уже разбиты на подмножества. Если  $(j+1)$ -й отрезок пути представляет собой вектор подъема  $(1, 1)$ , то элемент  $j+1$  является минимумом нового подмножества разбиения, никаких других возможностей нет. Поэтому кратность соответствующего ребра равна 1. Если это горизонтальный вектор, то отвечающий ему элемент может либо входить в одно из уже существующих множеств (таких возможностей ровно  $j$ , так как ровно в  $j$  имеющихся множествах еще не зафиксирован макси-

мальный элемент), либо образовывать одноэлементное множество. Поэтому кратность горизонтального ребра равна  $j + 1$ . Кратность вектора спада  $(1, -1)$  равна  $j$ , так как соответствующий ему элемент может быть максимальным в одном из  $j$  подмножеств. Соответствующая расстановка кратностей на ребрах в треугольнике Моцкина изображена на рис. 6.5.

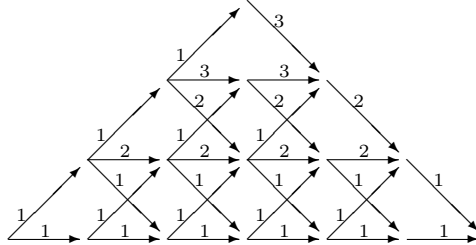


Рис. 6.5: Расстановка кратностей на ребрах, отвечающая производящей функции разбиений

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.3.1.** Число  $\check{r}_n$  разбиений множества  $N_n$  на непустые подмножества равно числу правильных путей в треугольнике Моцкина с кратностями, изображенном на рис. 6.5.

## 6.4 Задачи

*Задача 6.1.* Сколькими способами можно разменять рубль на монеты в 1, 2, 5, 10, 20 и 50 копеек?

*Задача 6.2.* Сколькими способами можно взвесить 78 г с помощью разновесок 1, 1, 2, 5, 10, 20, 50 г на

- а) одночашечных весах;
- б) двухчашечных весах?

(Применение двух различных разновесок одного веса дает различные взвешивания).

*Задача 6.3.* Дайте интерпретацию коэффициенту при  $q^m s^n$  в бесконечном произведении

$$(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^3) \dots$$

*Задача 6.4.* Всякое число может быть единственным образом записано в десятичной системе счисления. Поэтому

$$(1 + s + s^2 + \dots + s^9)(1 + s^{10} + \dots + s^{90}) \dots = \frac{1}{1 - s}.$$

Докажите.

*Задача 6.5.* Докажите, что число разбиений числа  $n$  на части, не превосходящие  $m$ , равно числу его разбиений на не более чем  $m$  частей.

*Задача 6.6.* Докажите, что

$$(1 + s)(1 + s^2)(1 + s^3) \dots = \frac{1}{(1 - s)(1 - s^3)(1 - s^5) \dots}.$$

*Задача 6.7.* Докажите, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных целых положительных слагаемых столько же способами, сколько его можно представить в виде суммы нечетных (может быть и совпадающих) слагаемых.

*Задача 6.8.* Докажите тождества Гаусса

- а)  $\frac{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots}{(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots} = 1 - 2s + 2s^4 - 2s^9 + \dots$ ;
- б)  $\frac{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)\dots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots} = 1 + s + s^3 + s^6 + s^{10} + \dots$

*Задача 6.9.* Докажите, что натуральное число  $n$  может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых  $2^{n-1} - 1$  способами, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать различными.

*Задача 6.10.* Найдите производящую функцию для числа симметричных (самосопряженных) разбиений.

*Задача 6.11.* Рассмотрим кольцо многочленов от бесконечного набора переменных, в котором переменным приписан натуральный вес, причем число переменных веса  $i$  конечно для любого  $i$ . Обозначим это число через  $q_i$ . Выпишите производящую функцию для последовательности размерностей пространств взвешенно однородных многочленов веса  $n$ .

*Задача 6.12.* Обозначим через  $\sigma_n$  сумму делителей числа  $n$  (включая 1 и само  $n$ ); например,  $\sigma_6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ . Пусть  $\Sigma(s)$  — производящая функция для последовательности  $\sigma_n$ ,

$$\Sigma(s) = s + 3s^2 + 4s^3 + 7s^4 + 6s^5 + 12s^6 + \dots$$

- а) Докажите, что

$$sP'(s) = P(s)\Sigma(s),$$

где  $P(s)$  — производящая функция для числа разбиений.

- б) Выведите отсюда рекуррентное соотношение на числа  $\sigma_n$ .

*Задача 6.13.* Докажите, что последовательность  $p_n$  чисел разбиений растет монотонно и оцените скорость ее роста.

*Задача 6.14.* Докажите, что производящая функция для числа диаграмм Юнга с периметром  $2n$  равна  $\frac{s^2}{1-2s}$ .

*Задача 6.15.* *Квадратом Дюрфи* в диаграмме Юнга называется максимальный квадрат, вписанный в ее левый верхний угол. Для каждого  $c \geq 1$  выпишите производящую функцию для числа диаграмм Юнга с квадратом Дюрфи  $c \times c$  по числу квадратов в диаграмме.

*Задача 6.16.* Докажите, что число разбиений числа  $n$  на части, не делящиеся на  $m$ , равно числу тех его разбиений, в которых ни одна часть не встречается более, чем  $m - 1$  раз.

*Задача 6.17.* Докажите, что число разбиений числа  $n$ , в которых более одного раза могут встречаться только части нечетной величины, совпадает с числом его разбиений, в которых ни одна часть не встречается более трех раз.

*Задача 6.18.* Покажите, что абсолютная величина разности между числом разбиений числа  $n$  на четное число частей и числом его разбиений на нечетное число частей равняется числу его разбиений с различными частями нечетной величины.

*Задача 6.19.* Покажите, что число разбиений числа  $n$ , в которых не встречаются последовательные целые числа, равно числу его разбиений, в которых ни одна часть не появляется лишь по одному разу.

*Задача 6.20.* Покажите, что число таких разбиений числа  $n$ , в которых каждая часть встречается 2, 3 или 5 раз, равно числу его разбиений на части, сравнимые с 2, 3, 6, 9 или 10 по модулю 12.

*Задача 6.21.* Покажите, что число разбиений числа  $n$ , в которых ни одна часть не встречается лишь по одному разу, равняется числу его разбиений, которые не имеют частей, сравнимых с 1 или 5 по модулю 6.

*Задача 6.22.* Покажите, что число разбиений числа  $n$ , в которых наименьшая часть встречается лишь один раз, а наибольшая часть не более чем вдвое превосходит наименьшую, равняется числу его разбиений, в которых наибольшая часть нечетна, а наименьшая больше, чем половина наибольшей части.

*Задача 6.23.* Покажите, что сумма числа частей, равных 1, по всем разбиениям числа  $n$  равна сумме числа различных частей также по всем разбиениям числа  $n$ .

*Задача 6.24.* Докажите, что

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1} \min(n_1, n_2, \dots, n_k) t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_k^{n_k} = \frac{t_1 t_2 \dots t_k}{(1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_k)(1-t_1 t_2 \dots t_k)}.$$

## Глава 7

# Производящие функции Дирихле

Утверждение о том, что для производящей функции  $A(s)$  отличной от нуля в нуле обратная к ней относительно деления функция  $1/A(s)$  существует, несложно — мы доказали его в первой главе. Однако предложенная там процедура последовательного нахождения коэффициентов функции не очень эффективна. В то же время, зачастую возникает необходимость иметь простые явные формулы для коэффициентов обратной функции, которые позволяли бы вычислять нужный коэффициент, не подсчитывая всех предыдущих. Формула обращения Мебиуса дает инструмент для такого вычисления в большом классе производящих функций. Как правило, эта формула применяется для производящих функций Дирихле — еще одной модификации производящих функций, используемой в теории чисел. По сути дела, она представляет собой несложное обобщение формулы суммы геометрической прогрессии. В этой главе мы объясняем формулу обращения Мебиуса и различные ее проявления, среди которых принцип включения-исключения.

### 7.1 Принцип включения-исключения

Обратимся к очень простой общей теореме формальной логики.

Пусть  $B$  — какое-либо конечное множество, элементы которого могут обладать некоторыми из свойств  $c_1, \dots, c_m$ . Обозначим через  $N(c_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  число элементов множества  $B$ , обладающих свойством  $c_i$ , через  $N(c_i, c_j)$ ,  $i \neq j$  — число элементов множества  $B$ , обладающих одновременно двумя свойствами  $c_i, c_j$ , и т.п. Пусть также  $N(1)$  — общее число элементов в множестве  $B$ .

**Теорема 7.1.1.** (Принцип включения-исключения) *Число элементов в множестве  $B$ , не обладающих ни одним из свойств  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , равно*

$$N(1) - N(c_1) - \dots - N(c_m) + N(c_1, c_2) + \dots - N(c_1, c_2, c_3) - \dots$$

**Доказательство.** Разобьем все элементы множества  $B$  на непересекающиеся группы:  $B = B_0 \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_m$ , где подмножество  $B_l$  состоит из элементов, обладающих ровно  $l$  свойствами. Рассмотрим последовательно выражения

$$\begin{aligned} & N(1) \\ & N(1) - N(c_1) - \dots - N(c_m) \\ & N(1) - N(c_1) - \dots - N(c_m) + N(c_1, c_2) + \dots + N(c_{m-1}, c_m) \\ & \dots \end{aligned}$$

Сопоставим каждому из этих выражений расстановку чисел на множествах  $B_l$ . Первое выражение соответствует присвоению каждой группе кратности 1 — мы учли все элементы по одному разу. Второму выражению соответствует присвоение множеству  $B_l$  кратности  $1 - l$ , так как при вычитании мы учли каждый его элемент ровно  $l$  раз. Третье выражение сопоставляет множеству  $B_l$  кратность  $1 - l + \binom{l}{2}$ , и т.д. Таким образом, переход от выражения с номером  $l$  к выражению с номером  $l + 1$  не меняет кратности множеств  $B_0, \dots, B_l$ . Эти кратности равны

$$\binom{l}{0} - \binom{l}{1} + \binom{l}{2} - \dots + (-1)^l \binom{l}{l},$$

что равно нулю для всех  $l$  за исключением  $l = 0$  и равно 1 при  $l = 0$ , откуда и вытекает теорема.  $\square$

Принцип включения-исключения легко запомнить с помощью следующего простого мнемонического правила. Пусть 1 соответствует объектам, обладающим всеми свойствами,  $1 - c_i$  — выражение для объектов, не обладающих свойством  $c_i$ . Тогда выражение для объектов, не обладающих ни одним из свойств  $c_1, \dots, c_m$ , будет иметь вид

$$(1 - c_1)(1 - c_2) \dots (1 - c_m),$$

откуда, раскрывая скобки, получаем

$$(1 - c_1)(1 - c_2) \dots (1 - c_m) = 1 - c_1 - \dots - c_m + c_1c_2 + \dots - c_1c_2c_3 - \dots$$

*Пример 7.1.2.* Решим с помощью принципа включения-исключения задачу о числе счастливых билетов. Эта задача состоит в следующем. Номер автобусного билета — шестизначное число от 000000 до 999999. Билет называется *счастливым*, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме последних трех цифр. Например, билеты с номерами 000000, 123060 и 495882 — счастливые, а билет 123456 — нет. Сколько всего существует счастливых билетов?

Заметим, что число счастливых билетов равно числу билетов с суммой 27. Действительно, пусть билет  $a_1b_1c_1a_2b_2c_2$  — счастливый. Поставим ему в соответствие билет  $a_1b_1c_1(9 - a_2)(9 - b_2)(9 - c_2)$ , сумма цифр которого равна 27. Это соответствие, очевидно, взаимно-однозначно.

Рассмотрим теперь множество всевозможных расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях и введем шесть свойств таких расстановок. Свойство  $c_i$  состоит в том, что число в  $i$ -й позиции не меньше 10. Число счастливых билетов равно числу расстановок, не обладающих ни одним из свойств  $c_1, \dots, c_6$ .

Число  $N(1)$  всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шесть позиций равно  $\binom{32}{5}$ . Число  $N(c_i)$  расстановок, удовлетворяющих свойству  $c_i$ , одинаково для всех  $i$  и равно  $\binom{22}{5}$ . Действительно, мы можем поставить в  $i$ -ю позицию число 10, а оставшуюся сумму 17 произвольно распределить по всем шести позициям.

Аналогично число расстановок, удовлетворяющих одновременно двум свойствам  $c_i$  и  $c_j$ , одинаково для любой пары свойств и равно  $\binom{12}{5}$ : мы ставим число 10 в  $i$ -ю и  $j$ -ю позиции, а оставшуюся сумму 7 произвольным образом распределяем по всем шести позициям. Число же расстановок, удовлетворяющих одновременно трем и более свойствам, равно нулю, так как общая сумма всех чисел меньше 30.

Количество различных свойств равно  $\binom{6}{1} = 6$ , количество различных пар свойств равно  $\binom{6}{2} = 15$ , поэтому общее число расстановок, не удовлетворяющих ни одному из свойств  $c_i$ , а, значит, и общее число счастливых билетов, дается следующим предложением.

*Утверждение 7.1.3. Число счастливых билетов равно*

$$\binom{32}{5} - 6\binom{22}{5} + 15\binom{12}{5}.$$

*Пример 7.1.4.* Решим с помощью принципа включения-исключения еще одну задачу, имеющую большое число приложений.

Перестановка  $\pi$  элементов множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  называется *беспорядком*, если  $\pi(k) \neq k$  ни при каких  $k = 1, \dots, n$ . Обозначим через  $d_n$  число беспорядков на множестве из  $n$  элементов. Вот начало таблицы чисел беспорядков:

$n$	0	1	2	3	4
$d_n$	1	0	1	2	9

Чтобы подсчитать число беспорядков, введем  $n$  свойств перестановок на множестве из  $n$  элементов. Свойство  $c_i$  состоит в том, что перестановка оставляет на месте элемент  $i$ . Число всех перестановок равно  $n!$ . Число перестановок, удовлетворяющих свойству  $c_i$ , равно  $(n-1)!$ : мы фиксируем  $i$ -й элемент перестановки, а остальные переставляются произвольно. Число перестановок, удовлетворяющих двум свойствам  $c_i$  и  $c_j$ , равно  $(n-2)!$ : два элемента перестановки фиксируются, остальные переставляются произвольно. Вообще, число перестановок, удовлетворяющих  $t$  свойствам, равно  $(n-t)!$ . Таким образом, мы приходим к следующей формуле.

*Утверждение 7.1.5. Число беспорядков на множестве из  $n$  элементов рав-*



но

$$\begin{aligned} d_n &= \binom{n}{0}n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots \\ &= n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

При  $n \rightarrow \infty$  выражение в скобках стремится, как хорошо известно, к  $e^{-1}$ . Таким образом, при больших значениях  $n$  беспорядки составляют приблизительно  $e$ -ую часть всех перестановок, т.е. около  $1/2, 71828 \approx 36, 8\%$ .

*Замечание 7.1.6.* К сожалению, принцип включения-исключения оказывается неэффективным при оценке асимптотик интересующих нас величин. Так, при вычислении количества беспорядков на множестве из  $n$  элементов первое слагаемое в сумме равно  $n!$ , а сумма первых двух слагаемых равна нулю. И та, и другая величина чрезвычайно далеки от точного значения  $n!/e$  старшего члена асимптотики, и для получения хороших оценок нужно брать гораздо больше слагаемых.

## 7.2 Производящие функции Дирихле и действия над ними

Рассматривавшиеся нами ранее производящие функции относились к классу степенных рядов. Однако в мультипликативной теории чисел большее применение находят производящие функции Дирихле. Самой известной среди них является *дзета функция Римана*:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad (7.1)$$

Общая же *производящая функция Дирихле*, отвечающая последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , имеет вид

$$\frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots$$

Дзета функция Римана отвечает последовательности  $1, 1, 1, \dots$ . Она играет в мире производящих функций Дирихле ту же роль, что и геометрическая прогрессия в мире обыкновенных производящих функций и экспонента в мире экспоненциальных производящих функций. Обратите внимание на то, что нумерация коэффициентов производящих функций Дирихле начинается с единицы, а не с нуля, как это было в случае обыкновенных производящих функций.

Причиной, обуславливающей введение производящих функций Дирихле, служит их поведение относительно умножения: при перемножении двух

функций  $A(s) = \sum a_n n^{-s}$  и  $B(s) = \sum b_n n^{-s}$  мы получаем функцию

$$\begin{aligned} A(s)B(s) &= \frac{a_1 b_1}{1^s} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2^s} + \frac{a_1 b_3 + a_3 b_1}{3^s} + \frac{a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1}{4^s} + \dots \\ &= \sum_n \frac{\sum_{kl=n} a_k b_l}{n^s}, \end{aligned}$$

где внутреннее суммирование ведется по всем разложениям числа  $n$  в произведение двух сомножителей. Таким образом, использование производящих функций Дирихле позволяет контролировать мультипликативную структуру натуральных чисел. Отметим, что сложение таких производящих функций соответствует обычному почленному сложению последовательностей.

Роль единицы при умножении производящих функций Дирихле играет функция  $1 = 1^{-s}$ , отвечающая последовательности  $1, 0, 0, \dots$ . Любая производящая функция Дирихле  $A(s)$  с ненулевым свободным членом,  $a_1 \neq 0$ , обратима: существует функция  $B(s)$ , такая, что  $A(s)B(s) = 1$ . Построим обратную функцию для дзета функции Римана.

**Теорема 7.2.1.** *Обратная функция для дзета функции Римана имеет вид*

$$M(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^s},$$

где

$$\mu_n = \begin{cases} (-1)^{t_n} & \text{где } t_n \text{ — число простых делителей числа } n, \\ & \text{если в разложении } n \text{ на простые множители} \\ & \text{нет повторяющихся множителей} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Последовательность  $\mu_n$  мы будем называть *последовательностью Мебиуса*, а функцию  $M(s)$  — *функцией Мебиуса*.

**Доказательство.** Для доказательства перемножим функции  $\zeta(s)$  и  $M(s)$ . Коэффициент при  $n^{-s}$ ,  $n > 1$  в произведении будет равен

$$\binom{t_n}{0} - \binom{t_n}{1} + \dots + (-1)^{t_n} \binom{t_n}{t_n} = 0.$$

Действительно, пусть разложение  $n$  на простые множители имеет вид  $n = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t}$ , где  $t = t_n$ . Тогда коэффициент при  $m^{-s}$  функции  $M(s)$  участвует в произведении с ненулевым коэффициентом в том и только в том случае, если  $m$  является произведением некоторого подмножества множества простых чисел  $p_1, \dots, p_t$ . Число таких подмножеств из  $k$  элементов равно  $\binom{t}{k}$ , а знак соответствующего коэффициента при  $m^{-s}$  равен  $(-1)^k$ .  $\square$

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Следствие 7.2.2.** Пусть  $f_n, g_n$  — две последовательности, такие, что

$$f_n = \sum_{t|n} g_t, \quad (7.2)$$

где суммирование ведется по всем делителям  $t$  числа  $n$ . Тогда элементы последовательности  $g_n$  выражаются через элементы последовательности  $f_n$  по правилу

$$g_n = \sum_{t|n} \mu_t f_t. \quad (7.3)$$

**Доказательство.** Действительно, равенство (7.2) означает, что

$$F(s) = \zeta(s)G(s),$$

где  $F(s)$  (соотв.,  $G(s)$ ) — это производящая функция Дирихле для последовательности чисел  $f_n$  (соотв.,  $g_n$ ). Умножая обе части последнего равенства на  $M(s)$ , получаем

$$M(s)F(s) = M(s)\zeta(s)G(s) = G(s),$$

что и составляет содержание равенства (7.3).  $\square$

Существование и единственность разложения натурального числа на простые множители позволяют найти представление дзета функции в виде произведения (и, соответственно, еще одно представление функции Мебиуса).

**Утверждение 7.2.3.** Имеют место разложения

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{1-2^{-s}} \frac{1}{1-3^{-s}} \frac{1}{1-5^{-s}} \frac{1}{1-7^{-s}} \cdots = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \\ M(s) &= (1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})(1-7^{-s}) \cdots = \prod_p (1-p^{-s}), \end{aligned}$$

где произведения берутся по всем простым числам.

## 7.3 Обращение Мебиуса

Формула суммы геометрической прогрессии, формула включения-исключения 7.1.1, теорема 7.2.1 и формула обращения Эйлера (6.1) являются проявлениями одного простого общего принципа, называемого принципом обращения Мебиуса.

Этот принцип позволяет находить обратную функцию к дзета-функции в широком классе ситуаций.

А именно, пусть  $s_1, s_2, \dots$  — набор (возможно бесконечный) переменных, и мы рассматриваем алгебру степенных рядов от этих переменных. Определим *дзета функцию* данной алгебры как сумму всех мономов в этой

алгебре, взятых с коэффициентом единица. Так, геометрическая прогрессия

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots$$

является дзета функцией алгебры степенных рядов от одной переменной. Функция, обратная дзета функции, является *функцией Мебиуса* алгебры. Она представляет собой сумму мономов алгебры, взятых с некоторыми коэффициентами, которые мы фактически уже вычислили в Теореме 7.2.1.

**Теорема 7.3.1.** *Коэффициент при мономе  $s_1^{n_1} \dots s_m^{n_m}$  в функции Мебиуса алгебры степенных рядов от переменных  $s_1, s_2, \dots$  равен нулю, если какая-нибудь из переменных входит в моном со степенью, большей 1 ( $n_i > 1$  для какого-нибудь  $i$ ), и он равен  $(-1)^m$ , если все  $m$  переменных входят в моном в первой степени.*

**Доказательство.** Можно провести доказательство теоремы, повторив, практически дословно, доказательство теоремы 7.2.1. Мы, однако, предпочтем несколько другой путь. Дело в том, что мы попросту знаем обратную функцию для дзета функции. Действительно, сама дзета функция является произведением дзета функций от каждой из переменных  $s_1, s_2, \dots$ . Поэтому она представляет собой произведение геометрических прогрессий

$$(1 + s_1 + s_1^2 + s_1^3 + \dots)(1 + s_2 + s_2^2 + s_2^3 + \dots) \dots$$

(Заметим, что коэффициент при каждом мономе является суммой *конечного* числа *конечных* произведений, и поэтому определен корректно.) Поэтому обратная к ней функция Мебиуса представляет собой не что иное, как произведение

$$(1 - s_1)(1 - s_2)(1 - s_3) \dots,$$

откуда утверждение теоремы следует мгновенно.  $\square$

Посмотрим, как применяется эта теорема. Чтобы вывести из нее теорему 7.2.1, рассмотрим набор переменных  $s_2, s_3, s_5, s_7, \dots$  (каждому простому числу отвечает одна переменная, в которой это число служит индексом). Тогда алгебра функций Дирихле изоморфна алгебре степенных рядов от указанного набора переменных: элементу  $n^{-s}$ , где  $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$  — разложение числа  $n$  на простые множители, отвечает моном  $s_1^{k_1} \dots s_m^{k_m}$  алгебры степенных рядов. Легко видеть, что это соответствие действительно задает изоморфизм алгебр. Теорема 7.2.1 теперь непосредственно вытекает из теоремы 7.3.1 (ср. утверждение 7.2.3).

Принцип включения-исключения можно вывести из теоремы 7.3.1 следующим способом. Рассмотрим алгебру многочленов, порожденных переменными  $s_1, \dots, s_n$  (каждая переменная отвечает одному рассматриваемому свойству), *срезанных по степени два*. Это означает, что мы приравниваем к нулю всякий моном в алгебре, если какая-нибудь переменная входит в него в степени выше, чем первая. Моном  $s_{i_1} \dots s_{i_m}$  в такой алгебре отождествляется с подмножеством  $\{i_1, \dots, i_m\}$  множества  $\{1, \dots, n\}$ . Формула включения-исключения есть не что иное, как формула для функции Мебиуса этой алгебры.

Столь же простой оказывается и ситуация с формулой обращения производящей функции для числа разбиений. Сопоставим каждому разбиению  $n = n_1 + \dots + n_m$  моном  $s_{n_1} s_{n_2} \dots s_{n_m}$  (если некоторые части в разбиении повторяются, то степень соответствующей переменной в мономе равна числу этих частей). Функция Мебиуса в этой алгебре, как мы знаем, имеет вид

$$(1 - s_1)(1 - s_2)(1 - s_3) \dots$$

При подстановке  $s_n = s^n$  дзета функция алгебры превращается в производящую функцию для числа разбиений (действительно, коэффициент при мономе  $s^n$  в полученной функции равен числу всех разбиений числа  $n$ ). Обратная к ней функция Мебиуса переходит при этом в функцию

$$(1 - s)(1 - s^2)(1 - s^3) \dots,$$

что и дает равенство (6.2).

## 7.4 Мультипликативные последовательности

Помимо дзета функции и функции Мебиуса в теории чисел большую роль играют и другие производящие функции Дирихле, отвечающие другим числовым последовательностям. Наиболее важными из них оказываются мультипликативные числовые последовательности.

**Определение 7.4.1.** Последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  называется *мультипликативной*, если для всех взаимно простых пар индексов  $m, n$  выполняется равенство  $a_m a_n = a_{m \cdot n}$ .

Заметим, что если в мультипликативной последовательности  $a_1 = 0$ , то эта последовательность состоит из одних нулей. Действительно,  $a_n = a_{1 \cdot n} = a_1 a_n = 0$  для любого числа  $n$ . Это же рассуждение показывает, что если  $a_1 \neq 0$ , то  $a_1 = 1$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только ненулевые мультипликативные последовательности.

Последовательность  $1, 0, 0, 0, \dots$  мультипликативна. Последовательность, состоящая из одних единиц, тоже, очевидно, мультипликативна. Последовательность Мебиуса также мультипликативна, что вытекает, например, из теоремы 7.2.1. Приведем еще несколько примеров.

*Пример 7.4.2.* Обозначим через  $\tau_n$  число делителей числа  $n$ . Производящая функция Дирихле для последовательности  $\tau_n$ , очевидно, имеет вид

$$\tau(s) = \frac{\tau_1}{1^s} + \frac{\tau_2}{2^s} + \dots = \zeta^2(s).$$

Если числа  $m$  и  $n$  взаимно просты, то число делителей их произведения  $mn$  равно произведению  $\tau_m \tau_n$ : если  $p$  — делитель числа  $m$ , а  $q$  — делитель числа  $n$ , то  $pq$  — делитель их произведения  $mn$ , причем каждый делитель произведения можно представить в таком виде единственным способом. Поэтому последовательность  $\tau_n$  мультипликативна.

*Пример 7.4.3.* Если через  $\nu_n$  обозначить число различных простых множителей числа  $n$ , то последовательность  $a_n = a^{\nu_n}$  оказывается мультипликативной для любого числа  $a$ .

Все мультипликативные последовательности определяются своими элементами, индексы которых равны степеням простых чисел. Другими словами, для мультипликативных последовательностей имеет место аналог утверждения 7.2.3.

**Утверждение 7.4.4.** *Последовательность  $\{a_i\}$  является мультипликативной тогда и только тогда, когда соответствующая ей производящая функция Дирихле представляется в виде*

$$\left(\frac{1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_4}{4^s} + \dots\right) \left(\frac{1}{1^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_9}{9^s} + \dots\right) \left(\frac{1}{1^s} + \frac{a_5}{5^s} + \frac{a_{25}}{25^s} + \dots\right) \dots, \quad (7.4)$$

где произведение берется по всем простым числам.

Иначе говоря, мультипликативная последовательность  $a_n$  однозначно задается значениями ее элементов  $a_{p^k}$ , номера которых — степени простых чисел. Из этого утверждения немедленно вытекает замечательное свойство мультипликативных последовательностей, обобщающее утверждение о мультипликативности последовательности Мебиуса.

**Следствие 7.4.5.** *Если производящие функции Дирихле  $A(s)$  и  $B(s)$  отвечают мультипликативным последовательностям, то последовательности коэффициентов их произведения  $A(s)B(s)$  и частного  $A(s)/B(s)$  также мультипликативны. Другими словами, производящие функции Дирихле, отвечающие мультипликативным числовым последовательностям, образуют группу по умножению.*

Действительно, если каждая из функций  $A(s), B(s)$  обладает представлением (7.4), то таким же представлением обладают их произведение и частное. Само же утверждение 7.4.4 немедленно следует из определения мультипликативной последовательности.

## 7.5 Задачи

*Задача 7.1.* Найдите с помощью формулы включения-исключения площадь сферического треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  на сфере единичного радиуса.

*Задача 7.2.* Получите ответ в задаче о числе счастливых билетов из примера 7.1.2.

*Задача 7.3.* Найдите с помощью принципа включения-исключения формулу для числа счастливых билетов с номерами из  $2p$  цифр, записанными в системе счисления с основанием  $q$ .

*Задача 7.4.* Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — различные простые множители числа  $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ . Докажите, что число  $\varphi_n$  чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с ним, равно

$$\varphi_n = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

*Задача 7.5.* Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что последовательность  $\varphi_n$  мультипликативна.

*Задача 7.6.* Докажите, что число различных правильных замкнутых  $n$ -угольников (в том числе самопересекающихся) равно  $\varphi_n$ .

*Задача 7.7.* Сколько несократимых дробей имеется среди  $n^2$  дробей

$$\begin{array}{ccccccc} 1/1, & 1/2, & 1/3, & \dots, & 1/n \\ 2/1, & 2/2, & 2/3, & \dots, & 2/n \\ \dots & & & & \\ n/1, & n/2, & n/3, & \dots, & n/n? \end{array}$$

*Задача 7.8.* Докажите, что число беспорядков на множестве из  $n$  элементов (см. пример 7.1.4) — ближайшее целое число к  $n!/e$ .

*Задача 7.9.* Пусть диагональные элементы в  $n \times n$  матрице равны нулю. Подсчитайте число ненулевых элементов в разложении определителя этой матрицы.

*Задача 7.10.* Докажите, что экспоненциальная производящая функция для последовательности чисел беспорядков имеет вид  $D(s) = e^{-s}/(1-s)$ .

*Задача 7.11.* Пусть  $\mu_n$  — последовательность Мебиуса. Докажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-\mu_n/n} = e^x.$$

*Задача 7.12.* Опишите все идеалы в алгебре функций Дирихле.

*Задача 7.13.* Докажите следующую формулу:

$$\begin{aligned} \max(a_1, \dots, a_n) &= a_1 + \dots + a_n - \min(a_1, a_2) - \dots - \min(a_{n-1}, a_n) \\ &\quad + \min(a_1, a_2, a_3) + \dots + (-1)^{n-1} \min(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

*Задача 7.14.* Положим  $\lambda_n = (-1)^k$ , где  $k$  — число простых множителей числа  $n$  (считаемых с учетом кратности). Докажите, что последовательность  $\lambda_n$  мультипликативна.

*Задача 7.15.* Найдите функцию Дирихле  $\zeta(s)\lambda(s)$ , где коэффициенты функции  $\lambda(s)$  определены в предыдущей задаче.

*Задача 7.16.* Обозначим через  $\sigma_\alpha(n)$  сумму  $\alpha$ -х степеней делителей числа  $n$ ,  $\sigma_\alpha(n) = \sum_{t|n} t^\alpha$  ( $\alpha$  — целое неотрицательное число). Докажите, что производящая функция Дирихле для этой последовательности имеет вид

$$\Sigma_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-\alpha).$$



## Часть II

# Графы, их перечисление и инварианты

## Глава 8

# Перечисление деревьев и лесов

Мы уже обращались к графам, подсчитывая число путей в них. В этой части мы более внимательно посмотрим на сами графы. Начнем с подсчета помеченных деревьев.

### 8.1 Перечисление помеченных деревьев

Ряд трудностей в задачах перечисления обязан своим происхождением тому, что перечисляемые объекты имеют различные *симметрии*. Так, например, если бы мы решили считать одинаковыми диагональные триангуляции правильных многоугольников (см. раздел 3.3), переходящие друг в друга при повороте, получение точной формулы превратилось бы в сложную задачу, да и сама формула вряд ли значительно продвинула нас в понимании природы триангуляций. Причина такого явления кроется в том, что различные триангуляции допускают различные группы симметрий. Все шесть поворотов триангуляции шестиугольника, изображенной на рис. 8.1 а) дают различный результат, в то время как повороты триангуляции, приведенной на рис. 8.1 б), приводят лишь еще к двум новым триангуляциям, а на рис. 8.1 в) — к одной.

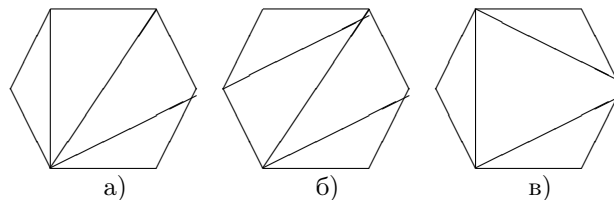


Рис. 8.1: Три диагональные триангуляции шестиугольника с различными симметриями

В то же время явная формула, сводящая число диагональных триангуляций многоугольника с *перенумерованными вершинами* к числу Каталана, дает хорошую оценку на асимптотику числа триангуляций многоугольника с *ненумерованными* вершинами. Действительно, число триангуляций, рассматриваемых с точностью до поворота  $(n + 2)$ -угольника, не превосходит  $c_n \sim \text{const} \cdot 4^n \cdot n^{-\frac{3}{2}}$ , и оно не меньше, чем  $c_n/(n + 2) \sim \text{const} \cdot 4^n \cdot n^{-\frac{5}{2}}$ . Таким образом нарушение симметрии — перенумерация вершин многоугольника — привело к серьезному упрощению задачи и лишь незначительно повлияло на точность ответа. Тот же прием — маркировка — оказывается весьма эффективным и во многих других перечислительных задачах. Мы увидим сейчас, как он используется при перечислении деревьев.

В главе 3 мы уже вводили определение графа. Сейчас мы сделаем его более формальным.

**Определение 8.1.1.** *Графом* будем называть тройку  $\Gamma = \{V, E, I\}$ , состоящую из конечного множества *вершин*  $V$ , конечного множества *ребер*  $E$  и отображения *инцидентности*  $I : E \rightarrow V \times V$ , сопоставляющего каждому ребру пару вершин (*концы ребра*), которые это ребро соединяет. Ребро называется *петлей*, если его концы совпадают. *Валентностью* вершины графа называется число ребер, для которых данная вершина является концом (при подсчете валентности петля считается за два ребра).

Граф удобно изображать на плоскости; вершинам графа соответствуют точки на плоскости, ребрам — отрезки дуг, соединяющие эти точки (см. рис. 8.2).

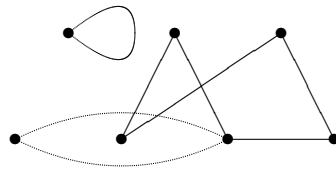


Рис. 8.2: Изображение графа на плоскости. Жирными точками обозначены вершины графа (их 7), отрезками и дугами — его ребра (их 8). Не выделенные точки пересечения ребер не являются вершинами

**Замечание 8.1.2.** 1. На самом деле, графом естественно считать не определенный выше объект, а класс эквивалентности таких объектов. Два графа  $\Gamma_1 = \{V_1, E_1, I_1\}$  и  $\Gamma_2 = \{V_2, E_2, I_2\}$  называются *изоморфными*, если существуют взаимно однозначные отображения  $v : V_1 \rightarrow V_2$  и  $e : E_1 \rightarrow E_2$ , такие, что  $I_2 \circ e = (v \times v) \circ I_1$ . Другими словами, два графа изоморфны, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между их вершинами, при котором ребра переходят в ребра. В дальнейшем мы не будем различать изоморфные графы.

2. У приведенного определения имеются варианты. Например, иногда естественно требовать, чтобы через каждую пару вершин графа проходило не более одного ребра, т.е. чтобы отображение инцидентности

было инъективным. Иногда в графе запрещаются петли и т.д. Мы будем всякий раз оговаривать подобные ограничения.

3. С топологической точки зрения граф представляет собой *одномерный комплекс*. Если на каждом ребре графа ввести *ориентацию* (т.е. указать направление этого ребра), то *граница ребра* — это разность конечной и начальной вершин.

**Определение 8.1.3.** Две вершины графа называются *соседними*, или *смежными*, если существует ребро, которое их соединяет. Граф называется *связным*, если для любой пары  $u, v \in V$  его вершин существует *путь*, их соединяющий, т.е. последовательность  $v_0 = u, v_1, \dots, v_k = v \in V$  вершин графа, в которой вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$  соседние для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ . *Циклом* называется последовательность ребер  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , в которой все ребра попарно различны и для каждого  $i = 2, \dots, k - 1$  один из концов ребра  $e_i$  является концом ребра  $e_{i-1}$ , а другой — концом ребра  $e_{i+1}$ , и свободные концы ребер  $e_k$  и  $e_1$  также совпадают. *Деревом* называется связный граф без циклов. Цикл называется *простым*, если все вершины в нем попарно различны.

На рис. 8.3 приведены все деревья с  $n \leq 5$  вершинами.



Рис. 8.3: Деревья с  $n \leq 5$  вершинами

Задача перечисления деревьев с  $n$  вершинами — сложная перечислительная задача. Возникающие при ее решении трудности обязаны своим происхождением как раз различным симметриям у различных деревьев. Мы займемся более простой задачей — перечислением деревьев с помеченными вершинами. Сопоставим каждой вершине дерева одно из чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$  так, чтобы разным вершинам соответствовали разные числа. На рис. 8.4 изображены все помеченные деревья с  $n \leq 4$  вершинами.

Количество различных способов пометить вершины данного дерева (и, более общим образом, любого графа) легко вычислить, если знать, сколько у дерева (или графа) симметрий. Все симметрии дерева образуют его *группу симметрий*, или *группу автоморфизмов*. Это подгруппа в группе перестановок множества вершин дерева. Она состоит из таких перестановок множества вершин, что любая пара вершин, соединенных ребром, переходит в пару вершин, соединенных ребром. Например, группа симметрий дерева-цепочки, в котором больше одной вершины, состоит из двух элементов — это тождественная перестановка вершин и отражение относительно середины цепочки. А количество элементов в группе симметрий дерева-звезды (одна вершина соединена со всеми остальными) из  $n$  вершин равно  $(n - 1)!$

— мы можем произвольно переставлять  $n - 1$  лучей звезды. Следующее утверждение очевидно.

**Утверждение 8.1.4.** *Число различных способов пометить данное дерево с  $n$  вершинами равно частному от деления  $n!$  на количество элементов в группе симметрий этого дерева.*

Так, число различных способов пометить цепочку на 4 вершинах равно  $4!/2 = 12$ , а число способов пометить звезду на 4 вершинах равно  $4!/3! = 4$ , поэтому всего существует  $12 + 4 = 16$  различных помеченных деревьев с 4 вершинами.

Последовательность чисел помеченных деревьев с  $n$  вершинами начинается так: 1, 1, 3, 16, ..., см. рис. 8.4 .

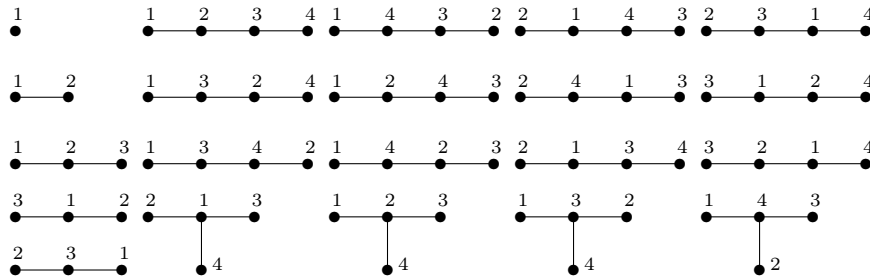


Рис. 8.4: Помеченные деревья с  $n \leq 4$  вершинами

**Теорема 8.1.5** (Кэли).<sup>1</sup> *Число помеченных деревьев с  $n$  вершинами равно  $n^{n-2}$ .*

Обозначим через  $T_n$  число корневых помеченных деревьев с  $n$  вершинами, т.е. число помеченных деревьев, в которых одна из вершин выделена и названа *корнем*. Ясно, что число корневых помеченных деревьев с  $n$  вершинами в  $n$  раз больше числа помеченных деревьев с  $n$  вершинами: в качестве корня можно выбрать любую из  $n$  различных вершин. Поэтому из теоремы Кэли сразу же вытекает

**Следствие 8.1.6.** *Число помеченных корневых деревьев с  $n$  вершинами есть  $T_n = n^{n-1}$ .*

Мы дадим два различных подсчета количества помеченных деревьев. Первый из них принадлежит Прюферу (1918 г.) и состоит в сопоставлении каждому дереву некоторого кода.

Возьмем какое-нибудь дерево с  $n$  вершинами, помеченными различными числами от 1 до  $n$ . Мы сопоставим дереву последовательность длины  $n - 2$

<sup>1</sup>Эту теорему обнаружил и доказал немецкий математик Карл Вильгельм Борххардт в 1860 г. Английский математик Кэли в своей заметке 1889 г., сославшись на работу Борххардта, усилил его теорему, после чего исходный результат также стали называть теоремой Кэли.

из букв  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Последовательность строится индуктивно. Возьмем в дереве лист с минимальным номером и возьмем в качестве первой буквы последовательности  $x$  с индексом, равным номеру вершины, с которой этот лист соединен. Затем удалим выбранный лист. Второй буквой будет  $x$  с индексом, равным номеру вершины, с которой соединен минимальный лист в оставшемся дереве. Этот лист тоже удалим, и будем повторять эту операцию до тех пор, пока не останется дерево из двух вершин (ребро). Получим как раз последовательность букв длины  $n - 2$ .

На рис. 8.5 изображена последовательность удаления вершин в дереве с помеченными вершинами и соответствующая этому дереву последовательность букв — его код Прюфера.

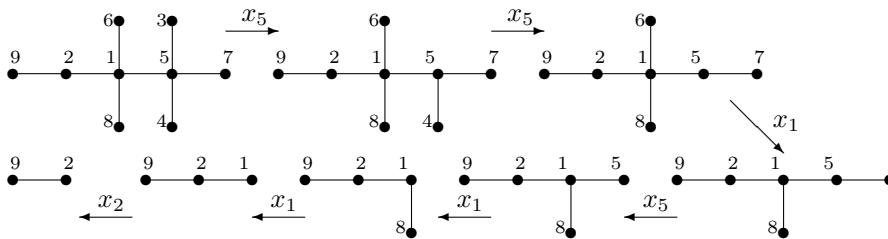


Рис. 8.5: Построение кода Прюфера помеченного дерева. Дерево на рисунке имеет код  $x_5x_5x_1x_5x_1x_1x_2 = x_5^2x_1x_5x_1^2x_2$

Наоборот, по любой последовательности букв длины  $n - 2$  можно восстановить помеченное дерево. Валентность любой вершины в этом дереве на 1 больше частоты, с которой переменная, индекс которой является номером этой вершины, встречается в последовательности. В частности, вершины, номера которых не встречаются в качестве индекса, — листья дерева. Взяв первый элемент последовательности, проведем ребро, соединяющее лист с минимальным номером и вершину, в которой стоит индекс этого первого элемента. Затем первый элемент последовательности стираем и повторяем процедуру для новой последовательности (с учетом того, что один лист уже использован, а валентность вершины с номером, равным индексу первого элемента последовательности, уменьшилась на 1). Последнее ребро соединяет две вершины, валентности которых еще не заполнены.

Рассмотрим, например, как строится помеченное дерево по последовательности  $x_2^2x_4x_2x_7^2$ . Количество букв в этой последовательности равно  $n - 2 = 6$ , поэтому в дереве  $n = 8$  вершин. Пять из этих вершин — листья; это вершины с пометками 1, 3, 5, 6 и 8 — теми, которые не представлены в последовательности. Вершина с пометкой 2 имеет валентность 4, с пометкой 4 — валентность 2, а с пометкой 7 — валентность 3.

Наименьший номер листа равен 1, а первая буква в последовательности —  $x_2$ , поэтому первое ребро дерева соединяет вершины с номерами 1 и 2. После стирания первой буквы последовательности остается последовательность  $x_2x_4x_2x_7^2$ . Буква с наименьшим номером, не входящая в эту последовательность, это  $x_3$ , поэтому очередное ребро соединяет  $x_3$  и  $x_2$ ,

а после вычеркивания первой буквы остается последовательность  $x_4x_2x_7^2$ . Следующее ребро  $x_5x_4$ , а последовательность  $x_2x_7^2$ . Теперь наименьший номер вершины, не входящей в последовательность и не выступавшей листом, это  $x_4$ . Мы соединяем ее ребром с вершиной  $x_2$ . Остается последовательность  $x_7^2$ . Соединяем вершину  $x_2$  (она еще не была листом) с  $x_7$  и оставляем последовательность  $x_7$ . Теперь соединяем  $x_6$  с  $x_7$ . Нужную валентность имеют все вершины полученного графа, за исключением  $x_7$  и  $x_8$ , валентность каждой из которых на единицу меньше предписанной. Их мы и соединяем ребром, завершая построение дерева.

Тем самым мы установили взаимно-однозначное соответствие между помеченными деревьями на  $n$  вершинах и упорядоченными мономами в разложении выражения  $(x_1 + \dots + x_n)^{n-2}$ . В частности, подставляя значения  $x_1 = \dots = x_n = 1$ , получаем формулу Кэли.

Второй подсчет числа помеченных деревьев требует рассмотрения производящей функции для этих чисел. Попробуем найти экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T_n s^n = \frac{1}{1!} s + \frac{2}{2!} s^2 + \frac{9}{3!} s^3 + \frac{64}{4!} s^4 + \dots$$

для числа корневых помеченных деревьев. Эйлер назвал ее *функцией Ламберта*. Заметим, что, в силу утверждения 8.1.4, коэффициент  $T_n/n!$  в этом ряде можно понимать как результат суммирования по всем (непомеченным) деревьям величин, обратных к количеству их автоморфизмов.

Выкинем из дерева корень. Тогда оно распадется на несколько деревьев, число которых равно валентности корня. Новые деревья тоже можно считать помеченными: требуется лишь заменить пометки  $\{l_1, \dots, l_i\}$ ,  $l_1 < \dots < l_i$  на пометки  $\{1, \dots, i\}$ , сохраняя их относительный порядок. Корнем нового дерева будем считать вершину, соединенную с корнем исходного дерева. Тем самым каждому корневому помеченному дереву с корнем валентности  $k$  сопоставлено (мульти)множество из  $k$  корневых помеченных деревьев. Мы говорим о мультимножествах, так как среди вновь образованных деревьев могут встречаться одинаковые, а в обычном множестве не может быть двух совпадающих элементов.

Из приведенного описания вытекает, что деревья с корнем валентности  $k$  перечисляются производящей функцией  $s\mathcal{T}^k(s)$ . Действительно, вклад в коэффициент при  $s^{n+1}$  в функции  $s\mathcal{T}^k(s)$  дают в точности элементы вида

$$\frac{\mathcal{T}^{l_1}}{l_1!} \dots \frac{\mathcal{T}^{l_k}}{l_k!} s^{l_1 + \dots + l_k},$$

для которых  $l_1 + \dots + l_k = n$ . Множество пометок  $n$  вершин  $k$  деревьев можно разбить на  $k$  подмножеств из  $l_1, \dots, l_k$  пометок  $\binom{n}{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!}$  способами. После того, как такое разбиение произведено, пометки на всех вершинах дерева с сохранением относительного порядка нумерации восстанавливаются однозначно. Поэтому число помеченных корневых деревьев на

$n + 1$  вершинах с корнем валентности  $k$  равно

$$n![s^n]\mathcal{T}^k(s) = \sum_{l_1 + \dots + l_k = n} \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} \mathcal{T}_{l_1} \dots \mathcal{T}_{l_k}.$$

Суммируя функции  $\frac{1}{k!}\mathcal{T}^k$  по всем  $k$ , получаем следующее утверждение.

**Теорема 8.1.7.** *Экспоненциальная производящая функция  $T(s)$  для числа помеченных корневых деревьев, перечисляющая их по числу вершин, удовлетворяет уравнению Лагранжа*

$$T(s) = se^{\mathcal{T}(s)}. \quad (8.1)$$

Уравнение (8.1) имеет единственное решение (докажите!) и позволяет последовательно вычислять коэффициенты функции  $\mathcal{T}(s)$ . Можно, например, подсчитать, что  $T_5 = 625$ ,  $T_6 = 7776$ . Для того, чтобы вывести из него теорему Кэли, достаточно проверить, что функция

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{s^n}{n!}$$

является его решением. Полезно, однако, найти ответ, не предполагая его заранее известным. Для этого нам понадобится следующая

**Теорема 8.1.8** (Лагранж). *Пусть функции  $\varphi = \varphi(s)$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\psi = \psi(t)$  связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$\varphi(s) = s\psi(\varphi(s)). \quad (8.2)$$

*Тогда знание функции  $\varphi$  позволяет однозначно восстановить функцию  $\psi$  и наоборот, причем коэффициент при  $s^n$  в функции  $\varphi$  равен*

$$[s^n]\varphi(s) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t).$$

Применим эту теорему к уравнению (8.1) на функцию  $\varphi(s) = \mathcal{T}(s)$ . Здесь  $\psi(t) = e^t$ . Получим

$$T_n = n![s^n]\mathcal{T}(s) = n! \frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = (n-1)! \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1},$$

что и является требуемым результатом.

**Доказательство теоремы 8.1.8** Докажем сначала, что уравнение Лагранжа (8.2) относительно неизвестной функции  $\varphi$  имеет единственное решение. Доказательство носит стандартный характер: коэффициенты функции  $\varphi$  можно последовательно восстановить, зная коэффициенты функции  $\psi$  и уже подсчитанные коэффициенты функции  $\varphi$ . Действительно, пусть

$$\varphi(s) = f_1s + f_2s^2 + f_3s^3 + \dots, \quad f_1 \neq 0, \quad \psi(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \dots$$



Тогда уравнение (8.2) имеет вид

$$f_1s + f_2s^2 + \dots = p_0s + p_1s(f_1s + f_2s^2 + \dots) + p_2s(f_1s + f_2s^2 + \dots)^2 + \dots$$

Приравнивая последовательно коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $s$ , мы заключаем, что коэффициент  $f_1$  определяется из равенства  $f_1 = p_0$ , коэффициент  $f_2$  — из равенства  $f_2 = p_1f_1$ , коэффициент  $f_3$  — из равенства  $f_3 = p_1f_2 + p_2f_1^2$  и т.д. Тем самым, мы можем найти все коэффициенты функции  $\varphi$ . Если же коэффициенты разложения функции  $\varphi$  известны и  $f_1 \neq 0$ , то те же самые уравнения позволяют последовательно найти все коэффициенты функции  $\psi$ .

Для вывода явного вида преобразования коэффициентов нам понадобится

**Лемма 8.1.9** (преобразование вычета при замене переменной). Пусть функция  $g(t)$  такова, что  $g(0) = 0, g'(0) \neq 0$ . Тогда

$$[s^{-1}]f(s) = [t^{-1}]f(g(t))g'(t).$$

Коэффициент при  $-1$ -ой степени переменной в разложении функции в ряд Лорана по этой переменной называется *вычетом* этой функции.

Для доказательства рассмотрим разложение  $f(s) = f_{-N}s^{-N} + f_{-N+1}s^{-N+1} + \dots$ ,  $g(t) = g_1t + g_2t^2 + \dots$ . При  $n \neq -1$

$$[t^{-1}]g^n(t)g'(t) = [t^{-1}]\frac{1}{n+1}(g^{n+1}(t))' = 0,$$

так как вычет производной любой функции равен нулю. При  $n = -1$

$$[t^{-1}]f_{-1}\frac{1}{g(t)}g'(t) = f_{-1},$$

что и требовалось. □

Коэффициент при  $s^n$  в производящей функции  $\varphi$  равен

$$[s^n]\varphi(s) = [s^{-1}]s^{n+1}\varphi(s).$$

Вычислим последний вычет с помощью леммы 8.1.9. Для этого перепишем уравнение Лагранжа (8.2) в виде подстановки

$$s = \frac{t}{\psi(t)},$$

где  $t = \varphi(s)$ . Тогда, согласно лемме,

$$\begin{aligned} [s^{-1}]s^{-n-1}\varphi(s) &= [t^{-1}]\frac{\psi^{n+1}(t)}{t^n} \cdot \frac{\psi(t)-t\psi'(t)}{\psi^2(t)} = [t^{-1}]\left(\frac{\psi^n(t)}{t^n} - \frac{\psi^{n-1}(t)\psi'(t)}{t^{n-1}}\right) \\ &= [t^{n-1}]\psi^n(t) - \frac{1}{n}[t^{n-2}](\psi^n(t))' = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы закончено. □

## 8.2 Леса и многочлены Абеля

Несвязное объединение деревьев называется лесом. Другими словами, *лес* это простой граф без циклов (в отличие от дерева, не обязательно связный). Каждый лес состоит из нескольких деревьев — своих *компонент связности*. *Корневым лесом* называется лес, в каждой компоненте которого выбран корень.

В предыдущем параграфе мы перечислили помеченные деревья и корневые деревья. Посмотрим теперь, как перечисление помеченных корневых лесов связано с многочленами Абеля  $A_n(x) = x(x+n)^{n-1}$ . Скажем, раскрыв скобки в многочлене Абеля  $A_3$ , получим

$$A_3(x) = x(x+3)^2 = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

В то же время, существует единственный трехкомпонентный помеченный лес на трех вершинах, 6 двухкомпонентных помеченных лесов на трех вершинах и 9 однокомпонентных помеченных лесов (деревьев) на трех вершинах (проверьте!). Числа 1, 6 и 9 — коэффициенты многочлена  $A_3$ . То же самое верно и для любого многочлена  $A_n$ :

**Теорема 8.2.1.** *Коэффициент при  $x^k$  в многочлене  $A_n$  равен числу помеченных корневых лесов из  $k$  деревьев на  $n$  вершинах.*

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию для многочленов Абеля

$$\mathcal{A}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{s^n}{n!}.$$

Теорема будет доказана, если мы докажем следующее утверждение.

**Теорема 8.2.2.** *Экспоненциальная производящая функция  $\mathcal{A}$  для многочленов Абеля имеет вид*

$$\mathcal{A}(x, s) = e^{x\mathcal{T}(s)},$$

где  $\mathcal{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{s^n}{n!}$  есть экспоненциальная производящая функция для корневых деревьев на  $n$  вершинах (функция Ламберта).

Для доказательства утверждения вспомним, что последовательность многочленов Абеля биномиальна (см. задачу 5.2), а значит, экспоненциальная производящая функция для нее представляется в виде

$$\mathcal{A}(x, s) = e^{xc(s)}$$

для некоторой функции  $c(s)$ . При этом линейная часть по  $x$  функции  $\mathcal{A}(x, s)$  имеет вид  $xc(s)$ . С другой стороны, из определения многочленов Абеля вытекает, что эта линейная часть равна

$$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} s^n,$$

т.е.  $c(s) = \mathcal{T}(s)$ .

Мы также можем доказать теорему 8.2.2, не ссылаясь на биномиальность последовательности Абеля и дав, тем самым, новый вывод утверждения о ее биномиальности. Для этого введем обобщенные многочлены Абеля и рассмотрим экспоненциальную производящую функцию для них.

Мы будем пользоваться двумя дополнительными бесконечными сериями параметров  $t_1, t_2, t_3, \dots$  и  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ . Пусть  $M \subset \mathbb{N}$  — конечное (быть может, пустое) подмножество множества натуральных чисел, и пусть  $|M|$  — количество элементов в  $M$ ,  $M = \{i_1, \dots, i_{|M|}\}$ . Положим

$$t_M = t_{i_1} + t_{i_2} + \dots + t_{i_{|M|}} = \sum_{i \in M} t_i; \quad \tau_M = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_{|M|}} = \prod_{i \in M} \tau_i.$$

Моном  $\tau_M$  полностью описывает множество  $M$ , и мы будем считать, что  $\tau_i^2 = 0$  для всех  $i$  (другими словами, все элементы множества различны). В частности

$$\tau_I \tau_J = \begin{cases} \tau_{I \cup J}, & \text{если } I \cap J = \emptyset, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим

$$A_M(x, t) = x(x + t_M)^{|M|-1}.$$

Ясно, что многочлен  $A_M(x, t)$  превращается в многочлен Абеля  $A_{|M|}(x)$  при подстановке  $t_1 = t_2 = \dots = 1$ .

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию

$$\tilde{\mathcal{A}}(x, t, \tau) = \sum_{M \subset \mathbb{N}, |M| < \infty} A_M(x, t) \frac{\tau_M}{|M|!}.$$

Теперь теорема 8.2.2 вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 8.2.3.** *Справедливо равенство*

$$\tilde{\mathcal{A}}(x, t, \tau) = e^x \sum t_M^{|M|-1} \tau_M. \quad (8.3)$$

**Доказательство.** Сравнивая коэффициенты при  $x^k \tau_M$  в левой и правой частях равенства 8.3, приходим к необходимости проверить, что для любого  $k$ ,  $0 \leq k \leq |M|$ , выполняется равенство

$$\binom{|M|-1}{k-1} t_M^{|M|-k} = \sum t_{I_1}^{|I_1|-1} \dots t_{I_k}^{|I_k|-1},$$

где сумма в правой части берется по всем упорядоченным разбиениям множества  $M$  на  $k$  подмножеств. Коэффициент при  $t_{i_1}^{a_1} \dots t_{i_{|M|}}^{a_{|M|}}$  (где  $a_1 + \dots + a_{|M|} = |M| - k$ ) в левой части последнего равенства есть

$$\binom{|M|-1}{k-1} \frac{(|M|-k)!}{a_1! \dots a_{|M|}!}.$$

Коэффициент при том же мономе в правой части имеет вид

$$\sum \frac{(|I_1| - 1)! \dots (|I_k| - 1)!}{a_1! \dots a_{|M|}!}.$$

Тем самым, нам достаточно показать, что

$$\binom{|M| - 1}{k - 1} (|M| - k)! = \sum (|I_1| - 1)! \dots (|I_k| - 1)!$$

но это равенство, очевидным образом, имеет место: достаточно сравнить коэффициенты при мономе  $t_1^{|M|-k}$ . Доказательство равенства (8.3) завершено.  $\square$

### 8.3 Перечисление посаженных лесов

Экспоненциальная производящая функция

$$Y(q) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{q^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{q^n}{n!} = \frac{1}{1!}q + \frac{2}{2!}q^2 + \frac{9}{3!}q^3 + \frac{64}{4!}q^4 + \dots,$$

для чисел корневых деревьев на  $n$  вершинах  $T_n = n^{n-1}$  вместе с экспоненциальной производящей функцией

$$Z(q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n \frac{q^n}{n!} = \frac{1}{1!}q + \frac{4}{2!}q^2 + \frac{27}{3!}q^3 + \dots$$

порождают очень интересную алгебру формальных рядов. Несмотря на то, что функции  $Y$  и  $Z$  кажутся очень похожими друг на друга, они совершенно по-разному ведут себя относительно умножения. Обозначим через  $\mathcal{A}$  алгебру формальных степенных рядов, порожденных рядами  $Y$  и  $Z$ . Отметим, что эти ряды алгебраически зависимы:

$$Z(t) = \frac{1}{1 - Y(t)}$$

(см. задачу 8.10).

Эти ряды позволяют перечислить посаженные деревья. Перечисление посаженных деревьев обобщает формулу Кэли.

Деревья, которые мы будем перечислять, посажены на некоторых графах. Рассматриваемые нами графы неориентированы, но могут иметь петли и кратные ребра. Корневой граф называется *круглым*, если он (1) связан; (2) не содержит вершин валентности 1 за исключением, быть может, корня и смежных с ним вершин и не содержит вершин валентности 2 за исключением, быть может, корня.

Пусть  $G$  — связный корневой граф и пусть  $v$  — вершина валентности 1 (лист) в  $G$ , не являющаяся ни корнем, ни смежной с ним вершиной. Тогда граф  $S_v(G)$  получается из  $G$  стиранием вершины  $v$  и выходящего из

нее ребра. Для вершины  $w$  валентности 2, не являющейся корнем, граф  $D_w(G)$  получается из  $G$  стиранием вершины  $w$  и последующим слиянием выходящих из нее ребер в общее ребро.

Применяя операции  $S$  и  $D$  к подходящим вершинам корневого связного графа в произвольном порядке, мы получим круглый граф, который не зависит от порядка применяемых операций. Этот круглый граф  $H$  называется *базой* исходного графа  $G$ , и мы говорим, что  $G$  является *лесом, посаженным на  $H$* .

Обозначим через  $f_H(n)$  взвешенное число корневых графов с  $n + 1$  вершинами и базой  $H$ , все некорневые вершины которых помечены различными числами от 1 до  $n$ . Вес, о котором идет речь, обратен порядку группы симметрий помеченного графа. Введем производящую функцию

$$F_H(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( f_H(n) \frac{q^n}{n!} \right),$$

где суммирование идет по всем лесам, посаженным на  $H$ . Тогда

$$F_H(q) = \frac{1}{|\text{Aut}(H)|} Y^{|V(H)|} (1 + Z)^{|E(H)|}; \quad (8.4)$$

здесь  $|V(H)|$  это число вершин в  $H$ , без учета корня, и  $|E(H)|$  это число ребер в  $H$ . Таким образом, производящая функция  $F_H(q)$  лежит в алгебре  $\mathcal{A}$ .

Равенство (8.4) доказать несложно: множитель  $Y^{|V(H)|}$  перечисляет деревья, высаженные на вершинах базового графа  $H$ , а множитель  $(1 + Z)^{|E(H)|}$  перечисляет деревья, высаженные на его ребрах. У каждого дерева первого вида есть выделенный корень — вершина, отождествленная с соответствующей вершиной графа  $H$ . Каждое дерево второго вида имеет две выделенных вершины — это две вершины, ближайšie к концам ребра графа  $H$ , на котором высажено дерево (отметим, что эти две вершины могут совпадать). В дереве любые две вершины соединяются единственным путем, и этот путь отождествляется с отрезком ребра, на котором высажено дерево. Производящая функция  $1 + Z$  в точности перечисляет помеченные деревья с двумя выделенными вершинами.

## 8.4 Обращение функции и суммирование по деревьям

В первой главе мы доказали, что всякая производящая функция, значение которой в 0 равно нулю, а линейный член отличен от нуля, имеет обратную относительно подстановки. Точнее говоря, в теореме 1.4.5 утверждается существование правой обратной и левой обратной функций, а среди задач в конце главы есть задача о совпадении этих двух функций. Доказательство теоремы состоит, по существу, в предъявлении рекуррентной процедуры для подсчета коэффициентов обратной функции. В этом параграфе мы обобщим явные формулы для этих коэффициентов и их связь с деревьями.

Чтобы эта связь была более прозрачной, нам будет удобно обращать экспоненциальную производящую функцию.

Итак, пусть функция  $B(t)$  имеет вид

$$B(t) = t - \frac{b_2}{2!}t^2 - \frac{b_3}{3!}t^3 - \dots$$

(такой выбор знаков упрощает формулы для коэффициентов обратной функции), и мы хотим найти ряд

$$A(s) = s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \frac{a_3}{3!}s^3 + \dots,$$

такой, что  $A(B(t)) = t$  (откуда следует, что и  $B(A(s)) = s$ ). Доказательство теоремы 1.4.5 показывает, что коэффициенты  $a_i$  ряда  $A$  являются многочленами от коэффициентов  $b_j$  ряда  $B$ ,

$$A(s) = \sum_{k_1} \left( \sum_{k_2, k_3, \dots} A_{k_1, k_2, k_3, \dots} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \dots \right) \frac{s^{k_1}}{k_1!}.$$

Вот как выглядят первые члены разложения обратного ряда:

$$\begin{aligned} A(s) = & s + b_2 \frac{s^2}{2!} + (b_3 + 3b_2^2) \frac{s^3}{3!} + (b_4 + 10b_3b_2 + 15b_2^3) \frac{s^4}{4!} \\ & + (b_5 + 15b_4b_2 + 10b_3^2 + 105b_3b_2^2 + 105b_2^4) \frac{s^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Мы хотим найти коэффициенты  $A_{k_1, k_2, k_3, \dots}$  этих многочленов.

**Теорема 8.4.1.** • Коэффициенты  $A_{k_1, k_2, k_3, \dots}$  обратного ряда отличны от нуля только, если выполняется равенство

$$\sum_{i \geq 2} ik_i = \sum_{i \geq 1} k_i - 1,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\sum_{i \geq 2} (i-1)k_i = k_1 - 1.$$

- Эти ненулевые коэффициенты равны

$$A_{k_1, k_2, \dots} = \frac{(\sum_{i \geq 1} k_i - 1)!}{\prod_{i \geq 2} (k_i! (i!)^{k_i}}.$$

- Коэффициент  $A_{k_1, k_2, \dots}$  равен числу корневых деревьев с корнем валентности больше 1 и с  $k_1$  занумерованными вершинами валентности 1, имеющим  $k_2$  вершин с 2 потомками,  $k_3$  вершин с тремя потомками, ....

Здесь *потомком* внутренней вершины корневого дерева называются все ее соседи, находящиеся дальше от корня, чем она сама. Для корня дерева число его потомков равно его валентности, а для всех остальных вершин оно на единицу меньше валентности. Отметим, что нумерация листьев дерева также разрушает его симметрию, что и делает задачу перечисления деревьев с занумерованными листьями разрешимой.

На рис. 8.6 приведены все корневые деревья, отвечающие разбиению  $1^5 2^2 3^1$ ; они имеют 5 листьев, две вершины с двумя потомками и одну вершину с тремя потомками. Для каждого из этих деревьев указано количество различных нумераций его листьев числами от 1 до 5. Общее количество этих нумераций для всех деревьев равно

$$105 = 20 + 10 + 30 + 30 + 15,$$

что и дает значение коэффициента

$$A_{5,2,1} = 105 = \frac{7!}{2! \cdot (2!)^2 \cdot 1! \cdot (3!)^1}$$

при мономе  $b_2^2 b_3 \frac{s^5}{5!}$  в разложении обратной функции.

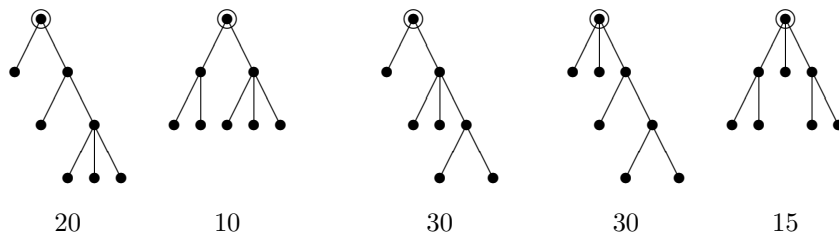


Рис. 8.6: Корневые деревья с пятью листьями, двумя вершинам с двумя потомками и одной вершиной с тремя потомками; для каждого дерева указано количество нумераций листьев

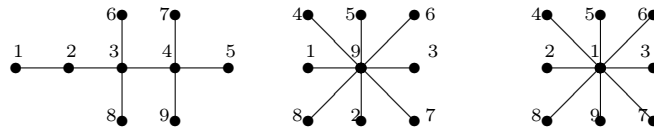
**Доказательство теоремы** мы предлагаем читателю провести самостоятельно.

## 8.5 Задачи

*Задача 8.1.* Нарисуйте помеченные деревья, коды Прюфера которых равны а)  $x_1^2 x_2^3 x_1 x_4$ ; б)  $x_6^4$ ; в)  $x_2^3 x_3 x_1^2$ .

*Задача 8.2.* Выпишите коды Прюфера всех помеченных деревьев с четырьмя вершинами и убедитесь, что каждая последовательность длины два из букв  $x_1, x_2, x_3, x_4$  встречается среди этих кодов ровно один раз.

*Задача 8.3.* Выпишите коды Прюфера помеченных деревьев



*Задача 8.4.* Докажите, что (некорневые) леса на  $n$  помеченных вершинах перечисляются экспоненциальной производящей функцией

$$\exp x \left( 1 \cdot \frac{s}{1!} + 1 \cdot \frac{s^2}{2!} + 3 \cdot \frac{s^3}{3!} + \cdots + n^{n-2} \cdot \frac{s^n}{n!} + \cdots \right).$$

Выпишите производящие многочлены для числа помеченных лесов на 2, 3, 4 и 5 вершинах.

*Задача 8.5.* Завершите следующее доказательство теоремы Кэли.

Произведение  $nT_n$  перечисляет количество помеченных деревьев на  $n$  вершинах с двумя выделенными вершинами. Мы хотим доказать, что это количество равно  $n^n$ . Соединив первую из выделенных вершин со второй кратчайшим путем, получим последовательность из некоторых чисел между 1 и  $n$ . К некоторым элементам этой последовательности приклеены деревья, помеченные другими числами от 1 до  $n$ .

С другой стороны, рассмотрим все функции из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя. Их ровно  $n^n$  штук. Каждой такой функции  $f$  можно сопоставить ориентированный граф, соединив вершину с номером  $i$  с вершиной с номером  $f(i)$ . Поскольку из каждой вершины выходит ровно одно ребро, этот граф представляет собой набор циклов, к некоторым вершинам которых приклеены деревья. Однако последовательность чисел и набор циклов — это два различных способа записи перестановки.

Тем самым, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством помеченных деревьев с двумя выделенными вершинами и множеством функций из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя.

Решение следующих двух задач дает еще одно доказательство теоремы Кэли.

*Задача 8.6.* Пусть  $G$  — граф с  $n$  помеченными вершинами. Пространство вещественнозначных функций на множестве вершин графа является  $n$ -мерным вещественным пространством  $\mathbb{R}^n$ . На этом пространстве действует оператор Лапласа, переводящий функцию  $f$  в функцию, значение которой в  $i$ -ой



вершине равно  $\sum(f(i) - f(j))$ , где суммирование идет по всем вершинам  $j$ , смежным с  $i$ . Действие оператора Лапласа очевидным образом линейно. Он переводит постоянную функцию в 0, поэтому одно из его собственных значений равно 0. Докажите *матричную теорему о деревьях* (теорему Кирхгофа): произведение остальных собственных значений оператора Лапласа, деленное на количество вершин в графе, равно количеству остовных деревьев<sup>2</sup> в  $G$ , умноженному на  $n$ .

*Задача 8.7.* Применив теорему Кирхгофа из предыдущей задачи к полному помеченному графу на  $n$  вершинах, выведите из нее теорему Кэли.

*Задача 8.8.* Уравнение (3.2) на производящую функцию  $\text{Cat}(s)$  для чисел Каталана можно переписать в виде

$$\text{Cat}(s) - 1 = s \text{Cat}^2(s).$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение Лагранжа (8.2) для функций  $\varphi(s) = \text{Cat}(s) - 1$  и  $\psi(t) = (1 + t)^2$ . Выведите отсюда с помощью теоремы Лагранжа явную формулу для чисел Каталана.

*Задача 8.9.* Всякое кубическое уравнение можно сдвигом переменной и растяжением привести к виду

$$z^3 - 3pz - 1 = 0,$$

откуда

$$z(z^3 - 3pz) = z.$$

Полагая  $\varphi(z) = z$ ,  $\psi(z) = z^3 - 3pz$ , выведите с помощью теоремы Лагранжа формулу для разложения корня этого кубического уравнения, обращаясь в 1 при  $p = 0$ , в ряд по степеням переменной  $p$ .

*Задача 8.10.* Докажите, что для функций  $Y(t)$  и  $Z(t)$  из раздела 8.3 выполняется равенство

$$Z(t) = \frac{1}{1 - Y(t)}.$$

---

<sup>2</sup> *Остовное дерево* в графе это набор ребер в нем, образующий дерево и проходящий через все его вершины.

## Глава 9

# Числа Гурвица

Графы с  $n$  помеченными вершинами тесно связаны с группой перестановок  $n$  элементов. Дело в том, что каждое ребро в таком графе определяет транспозицию — перестановку, меняющую местами концы ребра. Произведение этих транспозиций, взятых в некотором порядке, это элемент группы перестановок. Порядок умножения транспозиций можно задать, занумеровав ребра графа. Циклический тип полученной перестановки несет информацию о структуре графа. Например, если граф — дерево на  $n$  вершинах, то произведение транспозиций является циклом длины  $n$ , в каком бы порядке мы их ни перемножали.

Обратная задача — о нахождении количества наборов транспозиций, произведение которых дает перестановку заданного циклического типа, — это классическая задача Гурвица. Она тесно связана с такими современными предметами исследования как структура пространства римановых поверхностей и интегрируемые системы математической физики, что и сделало ее предметом интенсивного анализа в последние годы. Мы не будем говорить об этих глубоких областях математики, ограничившись знакомством с простейшими комбинаторными свойствами чисел Гурвица.

### 9.1 Графы и перестановки

Рассмотрим произвольный граф с  $n$  вершинами и занумеруем его вершины числами от 1 до  $n$ . Тогда каждому ребру этого графа можно сопоставить транспозицию — элемент группы перестановок  $\mathcal{S}_n$ . Эта транспозиция переставляет элементы, стоящие на концах выбранного ребра, оставляя остальные элементы на месте.

Нас будет интересовать произведение в группе  $\mathcal{S}_n$  транспозиций, отвечающих всем ребрам графа. Поскольку группа перестановок некоммутативна, произведение транспозиций зависит от порядка, в котором мы их берем. Чтобы задать этот порядок, необходимо в дополнение к нумерации вершин перенумеровать ребра графа. Например, для дерева с рис. 9.1 с

занумерованными вершинами и ребрами произведение транспозиций

$$\tau_8 \circ \dots \circ \tau_1 = (45)(15)(18)(12)(16)(29)(57)(35)$$

равно (697532148) т.е. является длинным циклом (циклом длины  $n = 9$ ) в группе перестановок  $\mathcal{S}_9$ :

$$1 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 9 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 7 \mapsto 1$$

(мы перемножаем перестановки справа налево, т.е. первой выполняется самая правая перестановка). Оказывается, это общее свойство деревьев.

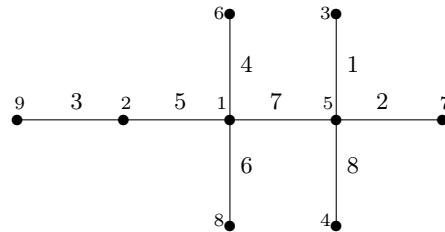


Рис. 9.1: Дерево с помеченными вершинами и занумерованными ребрами

**Теорема 9.1.1.** Пусть  $\Theta$  — дерево на  $n$  вершинах с произвольной нумерацией вершин и ребер. Тогда произведение  $\tau_{n-1} \circ \dots \circ \tau_1$  всех транспозиций, отвечающих ребрам дерева  $\Theta$ , в порядке их нумерации является длинным циклом в группе перестановок  $\mathcal{S}_n$ .

Прежде, чем доказывать теорему, отметим, что если ее утверждение справедливо при выбранной нумерации вершин дерева, то оно остается верным и при любой другой нумерации: перенумерация элементов множества  $N_n = \{1, \dots, n\}$  действует на любой перестановке этого множества сопряжением, а значит не меняет ее циклический тип.

**Доказательство.** Пусть  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  — произвольная перестановка, а  $\tau = (i, j) \in \mathcal{S}_n$  — транспозиция, меняющая местами элементы  $i, j \in N_n$ . Количество циклов в разложении произведения  $\tau \circ \sigma = (i, j) \circ \sigma$  в произведение независимых циклов зависит от того, входят ли элементы  $i$  и  $j$  в один цикл перестановки  $\sigma$  или они входят в разные циклы. Если  $i$  и  $j$  входят в один цикл, то умножение на  $\tau$  расщепляет этот цикл на два. Если же  $i$  и  $j$  принадлежат разным циклам, то умножение на  $\tau$  склеивает эти два цикла в один.

Рассмотрим начальный отрезок  $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$  произведения транспозиций, отвечающий первым  $k$  ребрам дерева. Пусть  $\Theta_k$  — подграф в дереве  $\Theta$ , состоящий из всех вершин этого дерева и ребер с номерами  $1, \dots, k$ . Приведенное рассуждение показывает, что циклы в разложении перестановки  $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$  в произведение независимых циклов взаимно однозначно соответствуют компонентам связности графа  $\Theta_k$  — вершины каждой компоненты связности образуют один цикл. Добавление ребра с номером  $k + 1$

приводит к тому, что два цикла, отвечающие компонентам связности, соединяемым этим ребром, склеиваются в один. При исчерпании всех ребер все компоненты склеиваются в одну компоненту связности, а циклы — в один длинный цикл. Теорема доказана.  $\square$

*Пример 9.1.2.* Посмотрим, как выглядит процесс соединения подграфов для дерева с рис. 9.1. Сначала каждая вершина образует отдельный цикл — неподвижную точку тождественной перестановки. При умножении на  $\tau_1$  мы получаем цикл длины два, состоящий из вершин 3 и 5. При умножении на  $\tau_2$  к этим двум вершинам добавляется вершина 7 — получается цикл длины три. Умножение на  $\tau_3$  приводит к появлению нового цикла длины два, состоящего из вершин 2 и 9. Умножение на  $\tau_4$  образует еще один цикл длины два — он состоит из элементов 1 и 6. После умножения на  $\tau_5$  последние два цикла сливаются в один цикл длины четыре. Последующее умножение на  $\tau_6$  добавляет в этот цикл элемент 8. Умножение на  $\tau_7$  сливает циклы длины три и пять в один цикл длины восемь; наконец, умножение на  $\tau_8$  добавляет к этому циклу последнюю оставшуюся изолированную вершину с номером 4.

Число  $n - 1$  это минимальное число транспозиций, в произведение которых можно разложить цикл длины  $n$  (если в графе с  $n$  вершинами меньше  $n - 1$  ребер, то он несвязен). Каждому разложению длинного цикла в  $\mathcal{S}_n$  в произведение  $n - 1$  транспозиций можно сопоставить дерево на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами и ребрами — ребро с номером  $k$  соединяет вершины с номерами, переставляемыми транспозицией  $\tau_k$ . Этот граф действительно является деревом, поскольку число ребер в нем на единицу меньше числа вершин и он связан. Тем самым, мы установили взаимнооднозначное соответствие между деревьями на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами и ребрами и разложениями длинных циклов в  $\mathcal{S}_n$  в произведение  $n - 1$  транспозиций.

Согласно теореме Кэли, число деревьев на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами равно  $n^{n-2}$ . Есть  $(n - 1)!$  различных нумераций ребер такого дерева. Поэтому имеется  $(n - 1)!n^{n-2}$  последовательностей из  $n - 1$  транспозиций в  $\mathcal{S}_n$ , произведение которых дает длинный цикл. В свою очередь, число длинных циклов в  $\mathcal{S}_n$  равно  $(n - 1)!$ , что приводит к следующему утверждению.

**Теорема 9.1.3.** *Каждый длинный цикл в  $\mathcal{S}_n$  допускает  $n^{n-2}$  различных представлений в виде произведения  $n - 1$  транспозиций.*

## 9.2 Числа Гурвица

Приведенное в предыдущем параграфе вычисление является первым примером вычисления чисел Гурвица. Более общим образом, числа Гурвица подсчитывают количество разложений данной перестановки в произведение заданного количества перестановок предписанных циклических типов. В этом параграфе мы обсудим различные варианты чисел Гурвица.

### 9.2.1 Простые и общие числа Гурвица

Всякую перестановку  $\sigma \in S_n$  можно разложить в произведение транспозиций, причем таких разложений существует много. Мы хотим для данного  $m$  подсчитать количество последовательностей  $\tau_1, \dots, \tau_m$  из  $m$  транспозиций, произведение которых равно данной перестановке  $\sigma$ ,

$$\sigma = \tau_m \circ \dots \circ \tau_1.$$

Следующие утверждения очевидны:

- число таких представлений зависит лишь от циклического типа перестановки  $\sigma$  — оно одинаково для всех перестановок с данным циклическим типом;
- есть минимальное число  $m_{\min} = m_{\min}(\sigma)$ , для которого такое представление существует, и это минимальное число равно  $n - c(\sigma)$ , где  $c(\sigma)$  — количество независимых циклов в  $\sigma$ . Действительно, минимальное число транспозиций, произведение которых является циклом длины  $l$  равно  $l - 1$ ;
- все значения  $m$ , для которых число представлений отлично от нуля, имеют одну и ту же четность, совпадающую с четностью перестановки  $\sigma$ .

Теперь мы готовы дать определение простого числа Гурвица. Ниже мы обозначаем разбиения одним из двух эквивалентных способов — либо как последовательность невозрастающих частей,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ , где  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ , в которой лишь конечное число частей отлично от нуля, либо в мультипликативной записи  $1^{k_1} 2^{k_2} \dots$ , где  $k_i$  обозначает кратность части  $i$  в разбиении и все кратности за исключением конечного числа равны 0 (а соответствующие им части не включаются в обозначение). В частности, справедливо равенство  $n = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n$ . Вот, например, как записываются в этом виде все разбиения числа 5:

$$5^1, 1^1 4^1, 2^1 3^1, 1^2 3^1, 1^1 2^2, 1^3 2^1, 1^5.$$

**Определение 9.2.1.** Пусть  $\mu$  — разбиение числа  $n$ ,  $\mu \vdash n$ . Простое число Гурвица  $h_{m;\mu}^\circ$  определяется равенством

$$h_{m;\mu}^\circ = \frac{1}{n!} |\{(\tau_1, \dots, \tau_m), \tau_i \in C_2(S_n) | \tau_m \circ \dots \circ \tau_1 \in C_\mu(S_n)\}|.$$

Здесь через  $C_2(S_n)$  обозначено множество всех транспозиций в  $S_n$ , а  $C_\mu(S_n)$  — множество всех перестановок с циклическим типом  $\mu \vdash n$  в  $S_n$ ; в частности,  $C_2(S_n) = C_{1^{n-2} 2^1}(S_n)$ .

Связное простое число Гурвица  $h_{m;\mu}$  определяется аналогичным образом, но рассматриваются только такие наборы из  $m$  транспозиций, что порождаемая ими подгруппа  $\langle \tau_1, \dots, \tau_m \rangle \subset S_n$  действует на множестве  $N_n =$

$\{1, \dots, n\}$  транзитивно. Это означает, что любой элемент  $i \in N_n$  переходит в любой другой наперед заданный элемент  $j \in N_n$  после применения некоторой цепочки указанных транспозиций.

Как мы знаем, любому набору транспозиций можно сопоставить граф с множеством вершин  $N_n$  и занумерованными ребрами. Простые числа Гурвица перечисляют графы с  $m$  ребрами и заданным циклическим типом произведения транспозиций, а связные простые числа Гурвица — связные графы.

Выполненное нами в предыдущем разделе вычисление показывает, что

$$h_{n-1;n^1} = n^{n-3}.$$

Действительно, число упорядоченных наборов из  $n - 1$  транспозиций, произведение которых есть длинный цикл, совпадает с числом деревьев на  $n$  вершинах с помеченными вершинами и ребрами, т.е. равно  $(n - 1)!n^{n-2}$ . После деления на  $n!$  мы получаем требуемое число Гурвица.

Приведем примеры вычисления чисел Гурвица “вручную”.

*Пример 9.2.2.* Пусть  $n = 3$  и  $\mu = 3^1$ . Произведение любых двух различных транспозиций в  $\mathcal{S}_3$  дает цикл длины 3, а подгруппа, ими порожденная, совпадает с  $\mathcal{S}_3$  и поэтому действует на множестве  $N_3$  транзитивно. Поэтому

$$h_{2;3^1}^\circ = h_{2;3^1} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1,$$

поскольку всего есть  $3 \cdot 2 = 6$  упорядоченных пар различных транспозиций. Это частный случай — для  $n = 3$  — нумерации помеченных деревьев.

Отметим, что если как простое число Гурвица, так и соответствующее связное простое число Гурвица отличны от нуля, то они совпадают в том и только в том случае, если перестановка  $\sigma$  представляет собой длинный цикл: в этом случае подгруппа группы перестановок, порожденная транспозициями  $\tau_i$ , автоматически действует транзитивно, а во всех остальных случаях это не так.

С ростом порядка симметрической группы и сложности разбиения прямые вычисления чисел Гурвица становятся все более сложными.

*Пример 9.2.3.* Пусть  $n = 3$  и пусть  $\mu = 1^1 2^1$  — циклический тип транспозиции. Разумеется, транспозицию можно представить как единственную транспозицию. Однако она допускает и представление в виде произведения трех транспозиций. Более того, произведение любой тройки транспозиций является нечетной перестановкой, а значит, транспозицией. Поэтому

$$h_{3;1^1 2^1}^\circ = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}.$$

Среди  $3^3 = 27$  троек транспозиций 3 тройки порождают подгруппы, действующие нетранзитивно (это подгруппы, состоящие из троек совпадающих транспозиций). Таким образом,

$$h_{3;1^1 2^1} = \frac{1}{6} \cdot (27 - 3) = 4.$$

Этот пример показывает, что числа Гурвица могут быть и дробными. Так оказывается даже в простейшем случае

$$h_{1;2^1}^\circ = h_{1;2^1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

*Пример 9.2.4.* Полезным инструментом вычисления простых чисел Гурвица могут служить ориентированные графы. Посмотрим, как с помощью такого графа можно подсчитать число  $h_{4;1^2 3^1}^\circ$ . Это число отвечает произведению четырех транспозиций в группе  $S_5$ , произведение которых является циклом длины 3. На рис. 9.2 изображен ориентированный граф, позволяющий вычислить это число. Стрелки в этом графе идут слева направо, и каждая стрелка означает умножение на транспозицию. Вершины графа — разбиения числа  $n = 5$ . Над каждой стрелкой надписана ее кратность. Кратность представляет собой число транспозиций, умножение на которые данной перестановки, цикловой тип которой совпадает с разбиением в начале стрелки, дает перестановку, цикловой тип которой совпадает с разбиением в конце стрелки. Обратите внимание на то, что сумма кратностей всех ребер, выходящих из одной вершины, равна 10 — это общее количество транспозиций в группе перестановок пяти элементов.

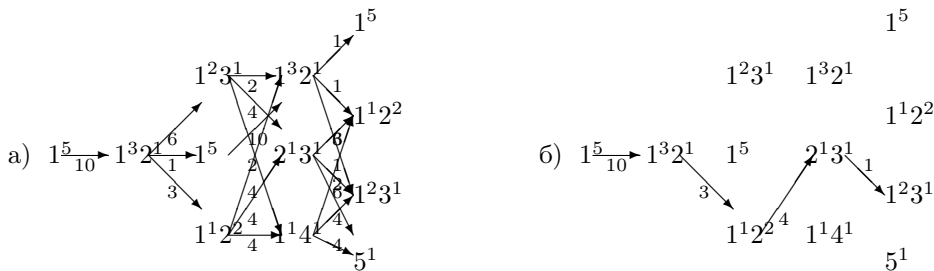


Рис. 9.2: а) Ориентированный граф для подсчета числа  $h_{4;1^2 3^1}$  и б) один из путей в нем; кратность выбранного пути равна 120

Например, на стрелке, идущей из вершины  $1^2 3^1$  в вершину  $1^1 4^1$ , написано 6: умножение перестановки циклового типа  $1^2 3^1$  на транспозицию оказывается перестановкой циклового типа  $1^1 4^1$  для 6 различных транспозиций. Действительно, такая транспозиция должна переставлять один из неподвижных элементов исходной перестановки (таких элементов 2) и один из элементов цикла длины 3 (таких элементов 3).

Интересующее нас число Гурвица есть  $1/5!$  умножить на суммарное количество путей длины 4, ведущих из исходной вершины  $1^5$  в вершину  $1^2 3^1$ . Каждый путь считается с кратностью, равной произведению кратностей всех входящих в него ребер. Это число равно

$$h_{4;1^2 3^1}^\circ = \frac{1}{5!} \cdot 10 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 10 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 34 \frac{1}{2}.$$

Подсчет связного числа Гурвица  $h_{4;1^2 3^1}$  требует более тонкого анализа путей в графе — мы должны отобрать те из них, которые порождают транзитивно действующую подгруппу.

Более общим образом, для набора разбиений  $\mu_1, \dots, \mu_m$  числа  $n$  мы можем рассмотреть общие числа Гурвица, перечисляющие разложения тождественной перестановки в произведении вида

$$\sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1,$$

в которых каждая перестановка  $\sigma_i$  имеет циклический тип  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . (В случае простых чисел Гурвица все перестановки за исключением одной являются транспозициями, а последняя равна  $\sigma^{-1}$  и имеет тот же циклический тип, что и  $\sigma$ ). *Общее число Гурвица* определяется как число наборов из  $m$  перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  данных циклических типов, поделенное на  $n!$ . *Связные числа Гурвица* определяются аналогичным образом с добавлением требования транзитивности действия подгруппы  $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle \subset S_n$ , порожденной перестановками  $\sigma_i$ . Мы не собираемся использовать общие числа Гурвица, поэтому не вводим обозначений для них.

### 9.3 Уравнение транспозиции

Введем две производящие функции для простых чисел Гурвица:

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu}^\circ p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots \frac{u^m}{m!}; \quad (9.1)$$

$$H(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots \frac{u^m}{m!}, \quad (9.2)$$

где в обоих случаях  $\mu$  пробегает множество всех разбиений всех натуральных чисел. Обратите внимание на то, что суммирование в выражении для функции  $H^\circ$  начинается с  $m = 0$ , а в выражении для функции  $H$  — с  $m = 1$ .

Как обычно, производящая функция для несвязных объектов является экспонентой производящей функции для связных:

**Теорема 9.3.1.** *Справедливо равенство  $H^\circ = \exp(H)$ .*

Это утверждение позволяет переформулировать утверждения о простых числах Гурвица в терминах связных простых чисел Гурвица и наоборот.

Кое-что про функции Гурвица сказать легко. Например,  $H(0; p_1, \dots) = p_1$ , т.е.  $H^\circ(0; p_1, \dots) = e^{p_1}$ . Действительно, свободный член по  $u$  функций  $H$  и  $H^\circ$  перечисляет разложение перестановки в произведение нулевого числа транспозиций. Такое произведение одно — это тождественная перестановка. Порождаемая тождественной перестановкой группа (которая, разумеется, состоит из одного элемента) действует транзитивно лишь при  $n = 1$ . Следующая теорема дает простой способ вычисления чисел Гурвица, отталкиваясь от этих начальных условий.



**Теорема 9.3.2** (уравнение транспозиции, Гульден–Джексон). *Производящая функция  $H^\circ$  для простых чисел Гурвица удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial u} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) H^\circ. \quad (9.3)$$

Прежде чем доказывать теорему, посмотрим, как вычислять производящую функцию  $H^\circ$  с помощью уравнения транспозиции. Один из удобных способов смотреть на функцию  $H^\circ$  состоит в том, чтобы разложить ее в ряд по переменной  $u$ ,

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} H_{(m)}^\circ(p_1, p_2, \dots) \frac{u^m}{m!}.$$

Тогда уравнение транспозиции можно переписать в виде рекурсии

$$H_{(m+1)}^\circ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) H_{(m)}^\circ = A H_{(m)}^\circ, \quad (9.4)$$

где преобразование  $A$  имеет вид

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right).$$

Начав с функции  $H_{(0)}^\circ = H^\circ(0; p_1, p_2, \dots) = e^{p_1}$ , мы сразу же получаем несколько первых членов разложения:

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = e^{p_1} \left( 1 + \frac{1}{2} p_2 \frac{u}{1!} + (p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + p_3) \frac{u^2}{2!} + \dots \right). \quad (9.5)$$

Отметим, что применение оператора  $A$  к функции  $H_{(m)}^\circ$  всегда порождает лишь конечное число ненулевых слагаемых, хотя в операторе их бесконечно много. Причина состоит в том, что функция  $H_{(m)}^\circ$  имеет вид произведения  $e^{p_1}$  на многочлен от переменных  $p_1, \dots, p_m$ , и ее производные по каждой из переменных  $p_k$  при  $k > m$  обращаются в нуль.

**Вывод уравнения транспозиции.** Уравнение описывает, что происходит при умножении данной перестановки на транспозицию, т.е. при замене представления

$$\sigma = \tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_1$$

представлением

$$\tau_m \circ \sigma = \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_1$$

(здесь мы воспользовались тем, что перестановка  $\tau_m^2$  является тождественной). Уменьшение числа транспозиций справа на единицу означает дифференцирование по  $u$  слева в уравнении (9.3), поскольку эта процедура понижает на единицу степень по  $u$ .

Умножение на транспозицию  $\tau_m$  меняет перестановку  $\sigma$  одним из двух различных способов: либо  $\tau_m$  меняет местами два элемента, принадлежащих одному циклу в  $\sigma$ , либо эти два элемента принадлежат различным циклам. В первом случае цикл в  $\sigma$  расщепляется на два цикла, сумма длин которых совпадает с длиной расщепленного цикла. Во втором случае, наоборот, два цикла склеиваются в единый цикл, длина которого равна сумме длин склеиваемых циклов. Два слагаемых справа в уравнении транспозиции соответствуют этим двум возможностям. Коэффициенты в уравнении отвечают количеству способов выбрать два элемента, переставляемые транспозицией  $\tau_m$ : для каждого из  $i + j$  элементов в цикле длины  $i + j$  пару можно подобрать единственным образом (при условии, что циклический порядок фиксирован), а в двух циклах длин  $i$  и  $j$  соответственно имеется  $ij$  способов выбрать пару элементов, перестановка которых склеивает эти циклы. Теорема доказана.  $\square$

## 9.4 Задачи

*Задача 9.1.* Пусть  $\Gamma$  — связный граф на  $n$  вершинах с единственным простым циклом. Докажите, что произведение в  $\mathcal{S}_n$  всех транспозиций, соответствующих ребрам графа  $\Gamma$ , раскладывается в произведение двух независимых циклов вне зависимости от порядка умножения транспозиций.

*Задача 9.2.* Приведите пример связного графа с единственным простым циклом, в котором длины двух циклов в произведении всех транспозиций, отвечающих его ребрам, зависят от выбранного порядка умножения.

**[Указание:]** В качестве такого графа можно взять цикл с четырьмя вершинами.

*Задача 9.3.* Приведите пример связного графа, в котором количество циклов в произведении всех транспозиций, отвечающих его ребрам, зависит от порядка умножения транспозиций.

**[Указание:]** В качестве такого графа можно взять граф на трех вершинах с четырьмя ребрами. Два из этих ребер должны соединять одну и ту же пару вершин.

*Задача 9.4.* Воспользовавшись рекуррентным соотношением (9.4), выпишите коэффициенты при  $u^3$  и  $u^4$  в разложении (9.5). Зная эти коэффициенты, выпишите формулы для числа разложений перестановки данного циклического типа в произведение трех и четырех транспозиций.

*Задача 9.5.* Вычислите простые и связные простые числа Гурвица  $h_{3;1^14^1}^\circ$ ,  $h_{3;1^14^1}$ ,  $h_{3;1^12^13^1}^\circ$ ,  $h_{3;1^12^13^1}$ .

*Задача 9.6.* Подсчитайте число упорядоченных пар циклов  $\sigma_1, \sigma_2$  длины 3 а) в группе  $\mathcal{S}_4$ , произведение которых  $\sigma_1\sigma_2$  имеет циклический тип  $2^2$ ; б) в группе  $\mathcal{S}_5$ , произведение которых  $\sigma_1\sigma_2$  имеет циклический тип  $5^1$ .

## Глава 10

# Соотношение удаление-стягивание и теорема Татта

Графы — простейшие топологические объекты. Их простота определяется тем, что их топологическая размерность 1 — первая нетривиальная размерность. Однако уже в этом случае природа изучаемых объектов чрезвычайно богата и содержательна.

Графы — чрезвычайно универсальный способ представления самых разнообразных данных. Эта всеобщность означает, что невозможно создать теорию графов: такая теория должна была бы охватывать множество далеких друг от друга областей. Однако если не задаваться столь всеобъемлющей задачей, то графовое представление может оказаться весьма удобным языком описания объектов какой-нибудь алгебраической или топологической теории и формулировки ее результатов, а также полезным источником для обнаружения связей между различными теориями.

### 10.1 Графы, изоморфизм и инварианты

Нас будут интересовать *инварианты* графов, т.е. функции на графах, принимающие одинаковые значения на изоморфных графах. Вообще, придумать инвариант несложно — годится любая функция, выраженная в терминах, не использующих конкретные множества вершин и ребер. Вот примеры таких функций:

- число вершин и число ребер в графе;
- максимальная степень вершины;
- максимальное расстояние между вершинами графа;

- ранг матрицы смежности графа;

и т.д. (*Матрица смежности* графа строится следующим образом. Занумеруем все  $n$  вершин графа числами от 1 до  $n$ . Матрица смежности — это  $n \times n$ -матрица, у которой в клетке  $(i, j)$  стоит 1, если вершины  $i$  и  $j$  соединены ребром, и 0 — в противном случае. На диагонали в матрице смежности стоят нули. Это очень полезный способ представления графа. Ясно, что ранг матрицы смежности — рассматриваемой как матрица с элементами из  $\mathbb{Z}_2$  — является инвариантом графа.) Вы можете поупражняться в придумывании своих собственных инвариантов.

Поскольку придумать инвариант графов несложно, встает вопрос: как сравнивать инварианты? Какие из них лучше, какие хуже? На этот вопрос нельзя ответить, если не знать, зачем инварианты нужны. Первый — и самый очевидный — ответ на последний вопрос состоит в том, что инварианты — удобный способ различать графы. Если один и тот же инвариант принимает разные значения на двух графах, то эти графы неизоморфны. Вообще, проблема изоморфизма графов — сложная с вычислительной точки зрения задача. Разумеется, изоморфизм двух графов можно проверить, отождествляя попарно всеми возможными способами вершины этих графов, однако этот алгоритм суперэкспоненциален по числу вершин. Алгоритмы, обеспечивающие полиномиальную сложность в наихудшем случае, неизвестны. Такая постановка вопроса приводит к следующим естественным требованиям к инварианту:

- инвариант должен быть легко вычислимым (скажем, за полиномиальное по числу вершин время);
- инвариант должен различать как можно больше неизоморфных графов;

и соответствующим “критериям качества”: один инвариант лучше другого, если он

- быстрее вычисляется;
- различает больше графов.

К сожалению, первое требование трудно выполнимо. Второе же допускает дальнейшую формализацию, и мы не раз к нему вернемся.

## 10.2 Хроматический многочлен

Рассмотрим теперь важный и нетривиальный пример инварианта. Пусть  $c$  — натуральное число. Обозначим через  $\chi_G(c)$  число правильных раскрасок вершин графа  $G$  в  $c$  цветов. Это функция от переменной  $c$ , и мы будем называть ее *хроматической функцией* графа  $G$ . Под *правильной раскраской* мы понимаем сопоставление цвета каждой вершине графа таким образом,



Рис. 10.1: Две различные раскраски двувёршинного графа без ребер

Рис. 10.2: Граф-цепочка  $A_n$ 

что любые две соседние (т.е. соединенные ребром) вершины окрашены в различные цвета.

Например, вершины графа допускают правильную раскраску в один цвет ( $c = 1$ ) в том и только в том случае, если в графе нет ребер, т.е. он состоит из  $n$  не связанных между собою вершин. Заметим, что в этом случае мы можем красить каждую вершину произвольно в любой из  $c$  цветов — раскраска все равно будет правильной, а значит,  $\chi_\Gamma(c) = c^n$ . Обратите внимание на то, что две раскраски вершин двувёршинного графа, изображенные на рис. 10.1, мы считаем *различными*. Другими словами, зафиксировав граф  $\Gamma$ , мы помечаем его вершины и считаем различными любые две раскраски, в которых хотя бы одна вершина окрашена в различные цвета.

Для графа из двух вершин, соединенных ребром, имеем  $\chi_\Gamma(c) = c(c-1)$ . Действительно, если мы окрасим первую вершину в один из  $c$  цветов, то для окраски второй вершины мы можем использовать один из оставшихся  $c-1$  цветов. Аналогично, для графа-треугольника (трех вершин, попарно соединенных ребрами)  $\chi_\Gamma(c) = c(c-1)(c-2)$ . Эти утверждения несложно обобщить на некоторые графы с большим числом вершин.

**Утверждение 10.2.1.** (i) Справедливо равенство

$$\chi_{K_n}(c) = c(c-1)(c-2) \dots (c-n+1) = (c)_n,$$

где  $K_n$  — полный граф на  $n$  вершинах, т.е. граф, в котором все вершины соединены ребрами попарно.

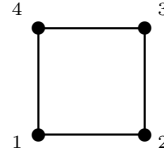
(ii) Справедливо равенство

$$\chi_{A_n}(c) = c(c-1)^{n-1},$$

где  $A_n$  — цепочка на  $n$  вершинах (см. рис. 10.2).

Напомним, что через  $(c)_n$  мы обозначаем нисходящий факториал аргумента  $c$ .

Прежде, чем переходить к общему анализу функции  $\chi_\Gamma(c)$ , заметим, что если граф  $\Gamma$  представляется в виде несвязного объединения двух графов

Рис. 10.3: Граф  $C_4$  с занумерованными вершинами

$\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ , то  $\chi_\Gamma(c) = \chi_{\Gamma_1}(c)\chi_{\Gamma_2}(c)$ . Это очень важное свойство, и мы остановимся на нем подробнее.

*Несвязное объединение* двух графов — это граф, множество вершин и множество ребер которого являются несвязным объединением множеств вершин и ребер этих графов. Множество компонент связности несвязного объединения двух графов является объединением множеств их компонент связности. То, что хроматическая функция несвязного объединения двух графов является произведением хроматических функций этих графов, очевидно: правильная раскраска каждого из графов автоматически дает правильную раскраску их объединения и наоборот. В дальнейшем нас очень часто будут интересовать именно такие инварианты графов, значения которых на несвязных объединениях графов равны произведению значений на каждом из объединяемых графов. Заметим, что значение такого инварианта на *пустом* графе следует полагать равным 1.

Вычислим теперь хроматическую функцию для несколько менее тривиального примера — циклического графа  $C_n$  ( $n$ -угольника). Начнем с графа  $C_4$  (квадрата). Занумеруем его вершины в циклическом порядке (см. рис. 10.3) и будем раскрашивать их последовательно. Первую вершину можно раскрасить в  $c$  цветов. Вторую — в  $c - 1$  цветов. Третью — тоже в  $c - 1$  цветов: ее цвет должен отличаться от цвета второй вершины. С четвертой вершиной дело обстоит сложнее. Ее цвет должен отличаться и от цвета третьей, и от цвета первой вершины. Разделим всевозможные окраски четвертой вершины в цвет, отличный от цвета третьей вершины, на две группы: те, в которых цвет четвертой вершины отличен от цвета первой, и те, в которых эти два цвета совпадают. Первая группа дает правильные раскраски квадрата, а вторая — правильные раскраски треугольника. Действительно, если первая и четвертая вершина покрашены в один и тот же цвет, то мы можем склеить их в одну, получив из квадрата треугольник. Тем самым, мы доказали равенство

$$\chi_{C_4}(c) = \chi_{A_4}(c) - \chi_{C_3}(c) = c(c-1)^3 - c(c-1)(c-2) = c(c-1)(c^2 - 3c + 3).$$

Здесь  $A_4$  — цепочка на четырех вершинах, а  $C_3 = K_3$  — треугольник.

На самом деле, в приведенном рассуждении нигде не использовалась структура графа  $C_4$ . Оно годится для произвольного графа. Пусть  $\Gamma$  — граф,  $e \in E(\Gamma)$  — ребро в нем. Обозначим через  $\Gamma'_e$  граф  $\Gamma$  с выкинутым ребром  $e$ , а через  $\Gamma''_e$  — этот же граф, в котором ребро  $e$  стянуто в точку (и, следовательно, два конца ребра  $e$  стали новой вершиной нового графа,

а число вершин в нем на 1 меньше, чем в  $\Gamma$ ). Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 10.2.2.** *Хроматическая функция удовлетворяет равенству*

$$\chi_{\Gamma}(c) = \chi_{\Gamma'_e}(c) - \chi_{\Gamma''_e}(c) \quad (10.1)$$

для любого графа  $\Gamma$  и любого ребра  $e$  в нем.

Тем самым, хроматическую функцию графа можно вычислять последовательно: оба графа в правой части равенства (10.1) устроены проще, чем граф в его левой части. У первого из них меньше ребер, а у второго — меньше и вершин, и ребер. Заметим, однако, что сложность такого вычисления экспоненциальна. Действительно, на каждом шаге мы получаем два графа вместо одного, т.е. на шаге с номером  $k$  мы получим  $2^k$  графов (некоторые из которых могут оказаться изоморфными). Важно также отметить, что — несмотря на свободу выбора ребра на каждом шаге — результат вычисления, в силу инвариантности хроматической функции, не зависит от выбираемых ребер.

*Замечание 10.2.3.* Хроматическую функцию можно определить также и для графов, содержащих петли и кратные ребра. При этом для графа с петлями она оказывается тождественно равной нулю (поскольку у таких графов правильные раскраски вершин отсутствуют). Хроматическая функция графа с кратными ребрами совпадает с хроматической функцией того же графа, в котором каждое кратное ребро заменено обычным однократным ребром. Такое определение согласуется с теоремой 10.2.2. Действительно, если в графе есть кратные ребра, то, выбирая любое из этих ребер в качестве ребра  $e$  и применяя к нему формулу (10.1), мы получаем в правой части формулы тот же граф, в котором кратность ребра уменьшилась на 1, а также граф с петлей, хроматическая функция для которого равна нулю.

Во всех просчитанных нами примерах хроматическая функция оказывается многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1. Теорема 10.2.2 позволяет распространить это утверждение на произвольные графы.

**Следствие 10.2.4.** *Хроматическая функция любого графа является многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1.*

Действительно, хроматическая функция графа на  $n$  вершинах, не имеющего ребер, равна  $c^n$ , что составляет базу индукции. Теорема 10.2.2 обеспечивает шаг индукции: согласно предположению индукции хроматический многочлен графа  $\Gamma'_e$  это многочлен степени  $n$  со старшим коэффициентом 1, а хроматический многочлен графа  $\Gamma''_e$  это многочлен степени  $n - 1$ . Их разность является многочленом степени  $n$  со старшим коэффициентом 1.



### 10.3 Немного о топологии графа

Граф — одномерный объект, поэтому его топология довольно проста. Однако она не совсем пуста. Разумеется, в первую очередь интерес представляет топология связных графов.

Набор ребер в графе  $\Gamma$  называется *эйлеровым подграфом*, если валентность всех вершин этого подграфа четна. Например, в треугольнике  $C_3$  есть два эйлеровых подграфа: пустой набор ребер и набор, состоящий из всех трех ребер.

Заметим, что всякий эйлеров подграф разбивается в объединение циклов, не имеющих общих ребер (отдельная вершина также образует такой цикл; длина его равна 0). Действительно, возьмем какой-нибудь цикл, содержащийся в данном эйлеровом подграфе. Такой цикл всегда существует (докажите!). Выкинув ребра, входящие в выбранный цикл, мы снова получаем эйлеров подграф, поскольку количество ребер, проходящих через каждую вершину, остается четным.

Рассмотрим векторное пространство  $\mathbb{Z}_2^{E(\Gamma)}$  над полем  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  вычетов по модулю 2, натянутое на все ребра графа как на образующие. Любое подмножество в множестве  $E(\Gamma)$  всех ребер графа  $\Gamma$  можно считать вектором в этом пространстве. Координата такого вектора, соответствующая ребру  $e$ , равна нулю, если ребро  $e$  не входит в подмножество, и равна 1 в противном случае. Наоборот, каждому вектору однозначно сопоставляется набор ребер графа. Размерность пространства  $\mathbb{Z}_2^{E(\Gamma)}$  равна  $|E(\Gamma)|$  — числу ребер в графе.

Множество  $\mathcal{C}(\Gamma)$  всех эйлеровых подграфов в  $\Gamma$  образует векторное подпространство в этом пространстве. Действительно, рассмотрим два эйлеровых подграфа и произвольную вершину графа. В сумме над  $\mathbb{Z}_2$  этих эйлеровых подграфов ребра, проходящие через выбранную вершину, аннигилируются попарно. Поэтому число неаннигилировавших ребер четно. Размерность векторного пространства эйлеровых циклов в графе  $\Gamma$  обозначается  $b_1(\Gamma)$  и называется *первым числом Бетти*, или *цикломатическим числом*.

Ученым языком, это число равно числу образующих в первой группе гомологий графа. Число компонент связности в графе называют также *нулевым числом Бетти*; оно обозначается через  $b_0(\Gamma)$ . Это — число образующих нулевой группы гомологий.

**Теорема 10.3.1** (Эйлер). *Первое число Бетти связного графа равно*

$$b_1(\Gamma) = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1.$$

Это утверждение можно считать определением цикломатического числа. Первое число Бетти графа, очевидно, является инвариантом графа.

Для доказательства теоремы Эйлера заметим, во-первых, что если граф  $\Gamma$  — дерево, то величины слева и справа от знака равенства равны 0. Действительно, непустых эйлеровых подграфов в дереве нет, а число ребер в нем

больше числа вершин на 1. Наоборот, если цикломатическое число данного связного графа равно 0, то этот граф — дерево. Действительно, любой простой цикл в графе — эйлеров подграф в нем.

Пусть теперь теорема Эйлера доказана для всех связных графов с цикломатическим числом  $k$ . Возьмем граф  $\Gamma$ , в котором  $|E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1 = k + 1$ . Выкинув из него произвольное ребро  $e$ , стирание которого не нарушает связности графа, мы получим граф с цикломатическим числом  $k$ . Рассмотрим в  $\mathcal{C}(\Gamma)$  подпространство эйлеровых подграфов, не содержащих ребро  $e$ . Это подпространство совпадает с пространством  $\mathcal{C}(\Gamma'_e)$  эйлеровых подграфов в графе  $\Gamma'_e$ , поэтому его размерность равна  $k$ .

С другой стороны, поскольку выкидывание ребра  $e$  не нарушает связности графа  $\Gamma$ , через  $e$  проходит хотя бы один цикл, а значит,  $e$  содержится хотя бы в одном эйлеровом подграфе. Сумма над  $\mathbb{Z}_2$  любых двух таких эйлеровых подграфов не содержит  $e$ , следовательно, лежит в  $\mathcal{C}(\Gamma'_e)$ . Тем самым, пространство  $\mathcal{C}(\Gamma)$  является прямой суммой пространств  $\mathcal{C}(\Gamma'_e)$  и одномерного векторного пространства, натянутого на произвольный вектор, представленный циклом, содержащим ребро  $e$ . Поэтому его размерность равна  $k + 1$ , и теорема Эйлера доказана.  $\square$

## 10.4 Многочлен Пенроуза

Вот еще один, по-видимому, чрезвычайно важный, инвариант графов.

Для любого разбиения множества  $V(\Gamma)$  вершин графа  $\Gamma$  на два непересекающихся подмножества  $V(\Gamma) = V_1 \sqcup V_2$  подмножество всех ребер, соединяющих вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ , называется *коциклом* в  $\Gamma$ . В  $S_3$  коциклы — это пустое подмножество ребер, а также все пары ребер. Обозначим через  $\mathcal{K}(\Gamma)$  множество всех коциклов.

В пространстве  $\mathbb{Z}_2^{E(\Gamma)}$  есть невырожденное скалярное произведение со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ : скалярное произведение двух наборов ребер равно четности числа элементов в пересечении этих наборов.

**Теорема 10.4.1** (Веблен, 1912). *Множество коциклов  $\mathcal{K}(\Gamma)$  является векторным подпространством в  $\mathbb{Z}_2^{E(\Gamma)}$ , ортогональным подпространству эйлеровых подграфов  $\mathcal{C}(\Gamma)$  относительно этого скалярного произведения:*

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{K}^\perp(\Gamma), \quad \mathcal{C}^\perp(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma).$$

Для доказательства теоремы Веблена заметим, во-первых, что любой коцикл пересекается с любым эйлеровым подграфом по четному числу ребер. Действительно, пусть коцикл сопоставлен разбиению множества вершин графа на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$ . Разобьем эйлеров подграф в объединение циклов, не имеющих общих ребер. В каждом цикле число ребер, соединяющих вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ , четно — если идти по циклу в выбранном направлении, то число переходов из  $V_1$  в  $V_2$  равно числу переходов из  $V_2$  в  $V_1$ . Поэтому четно и число таких ребер в

эйлеровом подграфе, а значит, скалярное произведение эйлерова подграфа и коцикла равно нулю.

Количество способов, которыми множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, равно  $2^{|V(\Gamma)|-1}$ . Поэтому множество всех коциклов состоит из  $2^{|V(\Gamma)|-1}$  элементов. С другой стороны, согласно формуле Эйлера, подпространство, ортогональное пространству эйлеровых подграфов, имеет размерность  $|V(\Gamma)| - 1$ , а значит оно состоит из  $2^{|V(\Gamma)|-1}$  элементов. Поскольку оно содержит множество всех коциклов, оно просто совпадает с ним. Теорема Веблена доказана.  $\square$

Например, как мы видели, размерность пространства циклов в  $C_3$  равна 1, а размерность пространства коциклов равна 2. Сумма этих размерностей равна 3 — числу ребер в  $C_3$ .

*Замечание 10.4.2.* Не следует думать, что пространство  $\mathbb{Z}_2^{E(\Gamma)}$  является прямой суммой подпространства эйлеровых подграфов и подпространства коциклов, несмотря на дополнительность размерностей этих подпространств. Например, для графа  $C_4$  — цикла на четырех вершинах — сумма всех ребер является одновременно циклом и коциклом. Поэтому подпространство эйлеровых подграфов, состоящее из пустого множества ребер и суммы всех ребер, лежит в пространстве коциклов,  $\mathcal{C}(C_4) \subset \mathcal{K}(C_4)$ . В общем случае, подпространство эйлеровых подграфов и подпространство коциклов могут пересекаться по подпространству положительной размерности.

Для подмножества  $E' \subset E(\Gamma)$  множества ребер в  $\Gamma$  рассмотрим подпространство

$$B_\Gamma(E') = \{C \in \mathcal{C}(\Gamma), C \cap E' \in \mathcal{K}(\Gamma)\} \subset \mathbb{Z}_2^{E(\Gamma)}.$$

*Многочленом Пенроуза* графа  $\Gamma$  называется многочлен от одной переменной (которую принято обозначать  $\lambda$ ), определяемый равенством

$$P_\Gamma(\lambda) = \lambda \sum_{E' \subset E(\Gamma)} (-1)^{|E'|} \lambda^{\dim B_\Gamma(E')}.$$

*Пример 10.4.3.* Вычислим многочлен Пенроуза графа  $C_4$ , цикла на четырех вершинах. В этом графе четыре ребра, поэтому вычисление многочлена  $P_{C_4}$  требует перебора всех  $2^4 = 16$  подмножеств в множестве ребер. Мы будем пересекать с каждым из этих подмножеств одномерное пространство циклов, состоящее из пустого набора ребер и множества всех ребер. В свою очередь, размерность пространства коциклов равна  $|V(C_4)| - 1 = 3$ , и оно состоит из пустого набора ребер, набора всех ребер и всех пар ребер.

Для пустого подмножества ребер пересечение с ним любого цикла является коциклом, поэтому вклад пустого подмножества в многочлен Пенроуза равен  $\lambda^1 = \lambda$ .

Вклад любого подмножества из одного ребра равен  $-\lambda^0 = -1$ , поскольку пересечение цикла с таким подмножеством является коциклом только, если исходный цикл пуст. Всего таких подмножеств четыре, поэтому их суммарный вклад равен  $-4$ .

Размерность пространства коциклов, являющихся результатом пересечения пространства циклов с любым подмножеством из двух ребер равна единице. Таких подмножеств шесть, поэтому их суммарный вклад равен  $6\lambda$ .

Суммарный вклад подмножеств из трех ребер равен  $-4$ .

Вклад подмножества, состоящего из всех четырех ребер, равен  $\lambda$ .

Суммируя все вклады, получаем

$$P_{C_4}(\lambda) = 8\lambda(\lambda - 1).$$

## 10.5 Соотношения Татта

Мы показали, что хроматический многочлен графа  $\chi_\Gamma(c)$  удовлетворяет соотношению

$$\chi_\Gamma(c) = \chi_{\Gamma'_e}(c) - \chi_{\Gamma''_e}(c)$$

для любого ребра  $e$  в графе  $\Gamma$ . Однако хроматический многочлен — не единственный инвариант графов, удовлетворяющий такому соотношению. Татт называет *W-функцией* всякий инвариант графов  $f$ , удовлетворяющий соотношению

$$f(\Gamma) = f(\Gamma'_e) + f(\Gamma''_e) \quad (10.2)$$

для любого графа  $\Gamma$  и любого ребра  $e$  в нем. Изменение знака  $-$  на  $+$  не играет существенной роли: хроматический многочлен несложно модифицировать так, чтобы он удовлетворял соотношению (10.2). Для этого достаточно умножить его на  $(-1)^{|V(\Gamma)|}$ , где  $|V(\Gamma)|$  — число вершин в  $\Gamma$ , т.е. рассмотреть модифицированный хроматический многочлен  $\tilde{\chi}_\Gamma(c) = (-1)^{|V(\Gamma)|}\chi_\Gamma(c)$ . Мы будем называть равенство (10.2) *соотношением Татта*.

Соотношение Татта мы будем рассматривать для графов с петлями и кратными ребрами. При этом в качестве ребра  $e$  можно брать только *звено* — ребро, не являющееся петлей. Как мы уже отмечали, хроматический многочлен можно определить и для таких графов, причем для выбранного продолжения соотношения (10.2) продолжают выполняться.

Помимо соотношений Татта хроматический многочлен удовлетворяет также соотношению

$$f(\Gamma) = f(\Gamma_1)f(\Gamma_2) \quad (10.3)$$

в случае, если граф  $\Gamma$  является несвязным объединением графов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Татт называет *W-функции*, удовлетворяющие соотношению (10.3), *V-функциями*, а мы будем называть их также *инвариантами Татта*. Для того, чтобы равенства (10.2) и (10.3) имели смысл, необходимо, чтобы в области значений инварианта  $f$  были определены сложение и умножение. Поэтому мы всегда будем предполагать, что эта область значений представляет собой некоторое фиксированное коммутативное кольцо  $K$ . В случае хроматического многочлена кольцо  $K$  является кольцом многочленов от одной переменной  $c$ ,  $K = \mathbb{Z}[c]$ . Наша задача — доказать теорему Татта, дающую полное описание инвариантов Татта.

*Пример 10.5.1* (сложность графа). Приведем еще один важный пример  $W$ -функции. *Остовным деревом* графа  $\Gamma$  называется поддерево в нем, содержащее все вершины графа  $\Gamma$ . *Сложностью* графа называется число остовных деревьев в нем. Обозначим сложность графа  $\Gamma$  через  $C(\Gamma)$ . Очевидно, что сложность несвязного графа равна нулю. Сложность графа удовлетворяет соотношению Татта (10.2). Действительно, все остовные деревья в графе  $\Gamma$  разбиваются на два класса: не содержащие данное ребро  $e$  и содержащие это ребро. Остовные деревья первого типа находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа  $\Gamma'_e$ , а остовные деревья второго типа — в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа  $\Gamma''_e$ .

## 10.6 Теорема Татта

Оба графа в правой части соотношения Татта “проще” графа в его левой части: в них меньше звеньев. Поэтому, применяя соотношение Татта последовательно, мы можем свести вычисление любой  $W$ -функции к ее вычислению на графах без звеньев. Такое вычисление можно понимать как замену любого графа формальной линейной комбинацией графов без звеньев с целыми неотрицательными коэффициентами.

Всякий граф без звеньев является несвязным объединением одновершинных графов с несколькими петлями. Поэтому для задания  $W$ -функции достаточно определить ее на таких графах. Для задания  $V$ -функции достаточно определить ее на одновершинных графах с произвольным количеством петель: на несвязных объединениях таких графов значение  $V$ -функции будет произведением ее значений на связных компонентах.

*Пример 10.6.1.* Хроматический многочлен однозначно определяется условиями (10.2), (10.3) и тем, что на одновершинном графе без петель он равен  $s$ , а на одновершинном графе с одной и более петлей он равен нулю.

Сложность графа однозначно определяется условием (10.2) и тем, что она равна 1 на любом одновершинном графе и 0 на несвязном объединении двух и более одновершинных графов.

Принципиальное значение поэтому имеет следующий вопрос: верно ли, что  $W$ -функция может принимать *любое* значение на несвязном объединении одновершинных графов (соответственно, верно ли что  $V$ -функция может принимать любое значение на одновершинных графах). Другими словами, последовательность упрощений графа с помощью соотношения Татта всегда приводит к линейной комбинации графов без звеньев. Однако таких последовательностей много — верно ли, что результат не зависит от выбранной последовательности?

Например, для графа на рис. 10.4 есть две различные возможности выбрать ребро, однако уже на следующем шаге мы с необходимостью приходим к равным линейным комбинациям графов. Верно ли, что так будет всегда? Теорема Татта дает положительный ответ на этот вопрос.

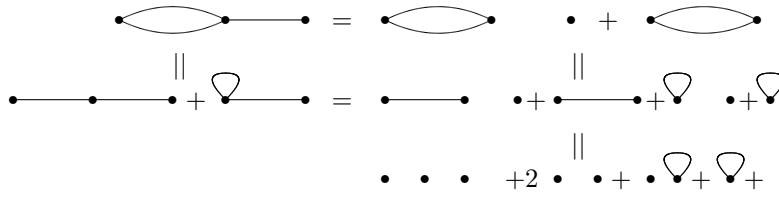


Рис. 10.4: Различные последовательности упрощения графа с помощью соотношений Татта

**Теорема 10.6.2 (Татт).** *Для любого набора значений на графах без звеньев (соотв., на одновершинных графах) существует  $W$ -функция (соотв.,  $V$ -функция), принимающая такие значения.*

Как мы уже видели раньше, такая функция единственна.

## 10.7 Доказательство теоремы Татта

В основе доказательства теоремы Татта лежит построение *универсальной  $V$ -функции*. Так мы называем  $V$ -функцию со значениями в кольце многочленов  $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$  от бесконечного числа переменных, такую, что любую другую  $V$ -функцию со значением в произвольном кольце  $K$  можно получить подстановкой вместо переменных  $s_i$  подходящих элементов кольца  $K$ . Заметим, что элементами кольца  $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$  являются конечные суммы мономов, представляющих собой конечные произведения переменных  $s_i$  с целыми коэффициентами.

Такую функцию можно построить следующим образом. Назовем *остовным подграфом* графа всякий его подграф, содержащий все его вершины. Тем самым, у каждого графа  $\Gamma$  ровно  $2^{|E(\Gamma)|}$  остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве ребер. Положим

$$U_\Gamma(s_0, s_1, \dots) = \sum_{E' \subset E(\Gamma)} s_0^{i_0(\Gamma(E'))} s_1^{i_1(\Gamma(E'))} \dots \quad (10.4)$$

В правой части формулы суммирование идет по всем подмножествам  $E'$  множества ребер  $E(\Gamma)$ ; через  $\Gamma(E')$  обозначен соответствующий остовный подграф, а  $i_m(\Gamma(E'))$  — число связных компонент в  $\Gamma(E')$  с цикломатическим числом  $i_m$  (т.е.,  $i_0(\Gamma(E'))$  — число деревьев среди связных компонент,  $i_1(\Gamma(E'))$  — число связных компонент с одним простым циклом и т.д.).

**Лемма 10.7.1.** *Функция  $U_\Gamma$  является инвариантом Татта, т.е.*

$$U_\Gamma = U_{\Gamma_e} + U_{\Gamma_e'}$$

для любого графа  $\Gamma$  и любого звена  $e$  в нем.

Прежде, чем доказывать лемму, посмотрим, что означает на практике вычисление функции  $U_\Gamma$ .

*Пример 10.7.2.* Пусть  $\Gamma = C_3$  — граф-треугольник. Тогда у него  $2^3 = 8$  остовных подграфов. Подграф с пустым множеством ребер содержит три компоненты, каждая с цикломатическим числом 0, поэтому его вклад в функцию  $U_{C_3}$  равен  $s_0^3$ . Каждый из трех подграфов с одним ребром содержит две компоненты, обе с цикломатическим числом 0. Их общий вклад равен поэтому  $3s_0^2$ . Аналогично, вклад трех двухреберных подграфов равен  $3s_0$ . Наконец, сам граф  $C_3$  состоит из одной компоненты связности с цикломатическим числом 1, поэтому его вклад равен  $s_1$ . Таким образом,

$$U_{C_3} = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1.$$

**Доказательство леммы 10.7.1** Фиксируем граф  $\Gamma$  и звено  $e$  в нем. Остовные подграфы графа  $\Gamma$ , не содержащие ребро  $e$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа  $\Gamma'_e$ . При этом соответствии подграфы изоморфны, а значит соответствующие им значения  $i_0, i_1, \dots$  совпадают. С другой стороны, остовные подграфы графа  $\Gamma$ , содержащие ребро  $e$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа  $\Gamma''_e$ . При этом соответствии в каждом остовном подграфе в  $\Gamma''_e$  стягивается одно ребро, что не меняет набора цикломатических чисел его связных компонент. Лемма доказана.  $\square$

Покажем теперь, что придавая различные значения переменным  $s_i$  мы можем превратить  $U$  в  $V$ -функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Обозначим одновершинный граф с  $n$  петлями через  $X_n$ . Выпишем значения функции  $U$  на  $X_n$ . Имеем

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2;$$

вообще

$$U(X_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} s_j.$$

Действительно, в графе  $X_n$  имеется  $2^n$  остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве петель. Все эти подграфы связны. Число остовных подграфов из  $k$  петель равно  $\binom{n}{k}$ , и его цикломатическое число равно  $k$ .

Из этих равенств мы можем выразить  $s_i$ :

$$s_0 = U(X_0), s_1 = U(X_1) - U(X_0), \dots, s_n = (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} U(X_j), \dots$$

Тем самым, для произвольного набора значений  $U(X_j) = t_j$ , мы можем восстановить значения  $s_i$ , а значит и значение функции  $U$  на произвольном графе, положив

$$s_i = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} t_j.$$

Теорема Татта доказана.  $\square$

Проверим проведенное выше вычисление значения функции  $U$  на графе  $C_3$ . Последовательно применяя соотношения Татта, мы заключаем, что

$$C_3 = X_0^3 + 3X_0^2 + 2X_0 + X_1.$$

Отсюда

$$U_{C_3} = U_{X_0}^3 + 3U_{X_0}^2 + 2U_{X_0} + U_{X_1} = s_0^3 + 3s_0^2 + 2s_0 + s_1 + s_0 = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1$$

в согласии с нашими предыдущими вычислениями.

## 10.8 Новые примеры инвариантов Татта

Результаты предыдущего раздела означают, что инвариант Татта можно задать, либо подставив в универсальную функцию  $U_\Gamma$  произвольные значения вместо параметров  $s_i$ , либо указав значения инварианта на графах  $X_n$ , — любой из этих наборов значений однозначно выражается через другой. Вот что получается при некоторых специальных подстановках.

*Пример 10.8.1* (ребра). Если мы положим в универсальном инварианте  $U$  все  $s_i = 1$ , то получим  $V$ -функцию, принимающую на графе  $\Gamma$  значение  $2^{|E(\Gamma)|}$ .

*Пример 10.8.2* (дихроматический многочлен и дихромат). Дихроматический многочлен  $Q_\Gamma(t, z)$  зависит от двух переменных, и определяется подстановкой  $s_k = tz^k$  в универсальный инвариант Татта. Как нетрудно видеть, значение дихроматического многочлена на графе  $X_n$  равно

$$Q_{X_n}(t, z) = t(1+z)^n,$$

и эти равенства также можно считать его определением.

Подстановка  $t = -c$ ,  $z = -1$  превращает дихроматический многочлен в хроматический.

*Дихромат* графа  $\Gamma$  определяется формулой

$$\chi_\Gamma(x, y) = (x-1)^{-b_0(\Gamma)} Q_\Gamma(x-1, y-1),$$

или

$$\chi_\Gamma(x, y) = (x-1)^{-b_0(\Gamma)} \sum_{E' \subset E(\Gamma)} (x-1)^{b_0(E')} (y-1)^{b_1(E')}.$$

*Пример 10.8.3* (поточковый многочлен). Подстановка  $z = -m$ ,  $t = -1$  превращает дихроматический многочлен в *поточковый*, который мы обозначим через  $F_\Gamma(m)$ :

$$F_\Gamma(m) = Q_\Gamma(-1, -m).$$

Объясним причину такого названия. Обозначим через  $\mathbb{Z}_m$  группу вычетов по модулю  $m$ . *Целью* над  $\mathbb{Z}_m$  в графе  $\Gamma$  называется формальная линейная комбинация ребер графа  $\Gamma$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_m$ , т.е. элемент группы



$\mathbb{Z}_m^{E(\Gamma)}$ . Ориентируем ребра графа  $\Gamma$  произвольным образом. Тогда *границей* цепи называется формальная линейная комбинация вершин графа  $\Gamma$ , в которой коэффициент при каждой вершине равен сумме коэффициентов цепи входящих в нее ребер минус сумма коэффициентов выходящих ребер. Цепь называется *циклом*, если у нее нулевая граница (т.е. коэффициенты границы при каждой вершине равны нулю). Понятие эйлерова подграфа совпадает с понятием цикла над  $\mathbb{Z}_2$ . При этом выбор ориентации графа не важен, так как в группе  $\mathbb{Z}_2$  всякий элемент совпадает со своим противоположным.

Например, граф из двух вершин, соединенных двумя ребрами, допускает две существенно различных ориентации. В обоих случаях цепи имеют вид  $a_1e_1 + a_2e_2$ , где символами  $e_1, e_2$  обозначены (ориентированные) ребра графа, а  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_m$ . Граница такой цепи равна сумме вершин, взятых с коэффициентами  $a_1 + a_2, -(a_1 + a_2)$  в случае, если ребра ориентированы одинаково, и с коэффициентами  $a_1 - a_2, a_2 - a_1$ , если ориентации ребер противоположны. Если оба ребра ориентированы одинаково, то циклы имеют вид  $ae_1 - ae_2$ , а если ориентация ребер противоположна, то циклы имеют вид  $ae_1 + ae_2$ .

**Утверждение 10.8.4.** *Значение многочлена  $F_\Gamma(m)$  при целом  $m \geq 2$  равно числу всюду ненулевых циклов над  $\mathbb{Z}_m$  в произвольной ориентации ребер графа  $\Gamma$ , умноженному на  $(-1)^{b_1(\Gamma)+1}$ .*

Всюду ненулевой цикл можно понимать как “поток” в графе, а его коэффициенты при ребрах как “величину тока” вдоль направления этого ребра, что и объясняет название инварианта. При этом суммарный поток через любую вершину равен нулю, т.е. вершина не является ни источником, ни стоком.

Для доказательства утверждения заметим прежде всего, что число всюду ненулевых циклов не зависит от выбора ориентации графа: чтобы превратить цикл в некоторой ориентации в цикл относительно другой ориентации, отличающейся от первой ориентацией некоторых ребер, достаточно поменять коэффициенты при этих ребрах на противоположные. Ясно, что такая операция задает взаимно-однозначное отображение, как на множествах циклов, так и на множествах всюду ненулевых циклов.

Проверим теперь, что число всюду ненулевых циклов над  $\mathbb{Z}_m$ , умноженное на  $(-1)^{b_1(\Gamma)}$ , является  $V$ -функцией. Мультипликативность числа всюду ненулевых циклов очевидна. Умножение на  $(-1)^{b_1(\Gamma)}$  не меняет этого свойства, поскольку при несвязном объединении графов их цикломатические числа складываются.

Фиксируем граф  $\Gamma$ , ориентацию в нем и ребро  $e \in \Gamma$ . Для проверки соотношения Татта заметим, что всякому всюду ненулевому циклу в графе  $\Gamma'_e$  можно сопоставить цикл в графе  $\Gamma$ . Действительно, рассмотрим цепь в  $\Gamma$ , отвечающую выбранному циклу в  $\Gamma'_e$ , и достроим ее до цикла. Для этого нужно приписать ребру  $e$  в  $\Gamma$  коэффициент, равный, с точностью до знака, значению коэффициента границы рассматриваемой цепи в любой из вершин, инцидентных ребру  $e$ . Эти два значения отличаются знаком,

и выбранный коэффициент зависит от выбранного направления ребра  $e$ . Может случиться, однако, что построенный таким образом коэффициент равен нулю. Такое происходит в том и только в том случае, когда цикл в  $\Gamma''_e$  задает цикл в  $\Gamma'_e$ . Тем самым, число всюду ненулевых циклов в  $\Gamma$  равно разности числа всюду ненулевых циклов в  $\Gamma''_e$  и  $\Gamma'_e$ . Цикломатические числа графов  $\Gamma$  и  $\Gamma''_e$  совпадают, а цикломатическое число графа  $\Gamma'_e$  меньше их на единицу. Поэтому после умножения числа всюду ненулевых циклов на  $(-1)^{b_1(\Gamma)}$  получаем функцию, удовлетворяющую соотношению Татта.

Осталось проверить ее совпадение с функцией  $F$  на графах  $X_n$ . Но мы знаем, что

$$F_{X_n}(m) = -(1 - m)^n,$$

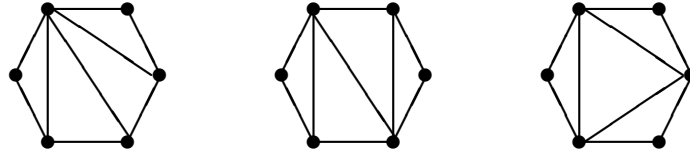
что после умножения на  $(-1)^{b_1(V(\Gamma))+1} = (-1)^{n+1}$  в точности равно  $(m - 1)^n$  — числу всюду ненулевых циклов в  $X_n$  над  $\mathbb{Z}_m$  (поскольку любая расстановка ненулевых элементов группы  $\mathbb{Z}_m$  на петлях графа  $X_n$  является циклом), что и требовалось.  $\square$

*Пример 10.8.5 (эйлеровость).* Вот  $V$ -функция со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ , выделяющая эйлеровы графы (напомним, граф называется *эйлеровым*, если у всех его вершин четные валентности). Положим значение  $V$ -функции  $\varepsilon$  равным 1 на всех графах  $X_n$ . Тогда значение такой функции на произвольном эйлеровом графе  $\Gamma$  равно 1, а на неэйлеровом графе — нулю.

Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить, что такая функция удовлетворяет соотношению Татта. Эйлеровость графа является *топологической* характеристикой — она не меняется при стягивании ребра. Поэтому если граф  $\Gamma$  эйлеров, то граф  $\Gamma''_e$  тоже эйлеров для любого ребра  $e \in E(\Gamma)$ , а граф  $\Gamma'_e$  неэйлеров — в нем валентности двух вершин меняются на 1. Если же граф  $\Gamma$  неэйлеров, причем в нем есть вершина нечетной валентности не на концах ребра  $e$ , то и оба графа  $\Gamma'_e$  и  $\Gamma''_e$  неэйлеровы. Если же нечетную валентность имеют лишь оба конца ребра  $e$ , то оба графа  $\Gamma'_e$  и  $\Gamma''_e$  эйлеровы. Во всех этих случаях

$$\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma'_e) + \varepsilon(\Gamma''_e).$$

Заметим также, что эйлеровость графа совпадает с числом всюду ненулевых циклов в нем с коэффициентами в группе  $\mathbb{Z}_2$ . Действительно, единственный способ приписать всем ребрам графа ненулевые значения в  $\mathbb{Z}_2$  состоит в том, чтобы сопоставить каждому ребру значение 1. В результате мы получим цикл в том и только в том случае, если в каждой вершине сходится четное число ребер, т.е. если наш граф — эйлеров. Тем самым, этот пример является частным случаем предыдущего.

Рис. 10.5: Различные триангуляции цикла  $C_6$ 

## 10.9 Задачи

*Задача 10.1.* Рассуждая по индукции, найдите  $\chi_{C_n}(c)$  для произвольного цикла длины  $n$ .

*Задача 10.2.* Пусть  $\Gamma$  — граф. Докажите, что хроматический многочлен графа, полученного из  $\Gamma$  добавлением одной вершины, соединенной с одной из его вершин, получается из хроматического многочлена графа  $\Gamma$  умножением на  $c - 1$ .

*Задача 10.3.* Пользуясь теоремой 10.2.2, подсчитайте хроматический многочлен для а) деревьев на  $n$  вершинах; б) триангуляций (т.е. циклов, в которых проведены “попарно непересекающиеся диагонали”, разбивающие их на треугольники, см. рис. 10.5. Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

*Задача 10.4.* Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена  $\chi_\Gamma(c)$  графа  $\Gamma$  с  $n$  вершинами (коэффициент при  $c^{n-1}$ ) равен числу ребер в  $\Gamma$ , взятому со знаком минус.

*Задача 10.5.* Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются — коэффициент при  $c^k$  имеет знак  $(-1)^{n-k}$  или равен нулю.

*Задача 10.6.* Дайте доказательство теоремы Татта, основанное на том, что операции удаления/стягивания двух различных звеньев в графе коммутируют между собой.

*Задача 10.7.* *Ориентацией* графа называется выбор направлений ребер в нем. Ориентация называется *ациклической*, если в графе отсутствуют циклы, идущие в направлении ориентированных ребер. Докажите, что число ациклических ориентаций графа равно  $|\chi_\Gamma(-1)|$  — модулю значения хроматического многочлена в точке  $-1$ . Проверьте, что это утверждение распространяется и на графы с кратными ребрами и петлями.

Например, для графа  $A_2 = K_2$  имеем  $\chi_{A_2}(-1) = 2$ , и действительно, обе возможные ориентации отрезка являются ациклическими. В свою очередь,  $\chi_{K_3}(-1) = -6$ , и из восьми возможных ориентаций треугольника ровно две не являются ациклическими. Для доказательства воспользуйтесь тем, что количество ациклических ориентаций удовлетворяет соотношению Татта (предварительно доказав этот факт).

*Задача 10.8.* Подсчитайте первое число Бетти а) для деревьев; б) для циклов  $C_n$ ; в) для полных графов  $K_n$ ; г) для триангуляций (см. задачу 10.3).

*Задача 10.9.* Вычислите многочлен Пенроуза для всех графов с не более, чем 4 вершинами.

*Задача 10.10.* Докажите, что многочлен Пенроуза связного графа, в котором есть *перешеек* (ребро, при выкидывании которого граф становится несвязным) равен нулю.

*Задача 10.11.* Вычислите сложность графов, принадлежащих к изучавшимся нами ранее типам. Какова сложность связного графа с цикломатическим числом 1, содержащего единственный простой цикл длины  $n$ ?

*Задача 10.12.* Проверьте, что сложность графа не меняется при удалении из него и добавлении к нему петель.

*Задача 10.13.* Понятие цикла над группой  $\mathbb{Z}_m$  можно обобщить на произвольные абелевы группы. Докажите, что потоковый многочлен перечисляет не только всюду ненулевые циклы над  $\mathbb{Z}_m$ , но и всюду ненулевые циклы над произвольной абелевой группой с  $m$  элементами.

*Задача 10.14.* Остовный подграф графа  $\Gamma$  на  $2n$  вершинах называется *совершенным паросочетанием*, или *1-фактором*, если он состоит из  $n$  ребер, никакие два из которых не имеют общих концов. Например, в квадрате  $C_4$  два совершенных паросочетания, а в полном графе  $K_4$  их три. Рассмотрим  $V$ -функцию, значение которой на графе  $X_n$  равно

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2}(3^n + 1).$$

Докажите, что значение этой  $V$ -функции на всяком *кубическом* графе (т.е., на графе, валентности всех вершин которого равны трем) равно числу совершенных паросочетаний в нем.

Проверим это утверждение для кубического графа  $K_4$  — полного графа на четырех вершинах. Значение универсального инварианта  $U$  на таком графе равно

$$U_{K_4} = s_0^4 + 6s_0^3 + 15s_0^2 + 4s_0s_1 + 16s_0 + 15s_1 + 6s_2 + s_3.$$

Его несложно вычислить благодаря высокой степени симметрии графа  $K_4$ . Например, в множестве его ребер имеется  $\binom{6}{3} = 20$  трехреберных подмножеств. Четыре из соответствующих остовных подграфов составляют треугольник  $C_3$ , объединенный с отдельной вершиной, остальные 16 состоят из трех компонент связности с цикломатическим числом 0. Таким образом, вклад трехреберных подграфов в универсальный инвариант равен  $4s_0s_1 + 16s_0^3$ . Вычисление остальных слагаемых еще проще.

Воспользовавшись выражениями для  $s_n$

$$\begin{aligned} s_0 &= t_0, & s_1 &= t_1 - t_0, \\ s_2 &= t_2 - 2t_1 + t_0, & s_3 &= t_3 - 3t_2 + 3t_1 - t_0, \end{aligned}$$

через значения на базисных графах и известными значениями

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -5, \quad t_3 = 14,$$

получаем

$$s_0 = -1, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = -10, \quad s_3 = 36.$$

Подстановка этих значений в универсальный инвариант дает 3, что и требовалось.

*Задача 10.15.* Подсчитайте число совершенных паросочетаний в а) цепочках  $A_n$ ; б) циклах  $C_n$ ; в) полных графах  $K_n$ ; г) в триангуляциях (см. задачу 10.3).

*Задача 10.16.* Найдите все графы с шестью вершинами, имеющие 6 совершенных паросочетаний.

*Задача 10.17.* Составьте таблицу, в которой для всех связных графов с  $\leq 5$  вершинами указаны значения всех введенных выше инвариантов графов.

## Глава 11

# Алгебра Хопфа графов

При обсуждении теневого исчисления мы выяснили, что оно тесно связано со структурой градуированной коалгебры на пространстве многочленов от одной переменной. Эта структура естественным образом распространяется и на пространство многочленов от многих переменных. В этой главе мы приводим еще один пример коалгебраической структуры — на пространстве графов. Коалгебра графов также градуирована — числом вершин в графе. Добавив к коумножению умножение, порожденное несвязным объединением графов, мы получаем на пространстве графов структуру биалгебры. Свойства многих инвариантов графов тесно связаны с наличием этой структуры.

### 11.1 Алгебра Хопфа графов

#### 11.1.1 Структура алгебры

Большинство из рассматривавшихся нами в предыдущих главах инвариантов графов являются мультипликативными: их значение на несвязном объединении графов равно произведению их значений на каждом из объединяемых графов. Тот факт, что это свойство присуще большому количеству интересных инвариантов, навел Татта на мысль рассматривать несвязное объединение графов как умножение в кольце, а мультипликативные инварианты — как гомоморфизм колец. Из соображений удобства языка мы будем брать в качестве базового кольца поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел (а не кольцо целых чисел  $\mathbb{Z}$ ) и говорить об *алгебре* графов над полем  $\mathbb{C}$ .

**Определение 11.1.1.** *Алгеброй графов  $\mathcal{G}$  называется бесконечномерная алгебра с единицей над  $\mathbb{C}$ , порожденная как алгебра простыми связными графами, умножение образующих в которой задается несвязным объединением графов.*

Напомним, что *простой граф* не содержит петель и кратных ребер.

*Пример 11.1.2.* Например, мы можем рассмотреть такой элемент алгебры  $\mathcal{G}$ :

$$g = 15 + 7\pi K_4 - (2 - e)C_5C_6 + \frac{3}{4}C_4^3 - K_{12}; \quad (11.1)$$

Здесь 15 — коэффициент при пустом графе, через  $K_4$  обозначен полный граф на четырех вершинах,  $C_5C_6$  — граф, полученный несвязным объединением цикла на пяти вершинах и цикла на 6 вершинах,  $C_4^3$  — граф, полученный несвязным объединением трех циклов на четырех вершинах,  $K_{12}$  — полный граф на 12 вершинах. На практике, однако, нам редко придется сталкиваться с иррациональными коэффициентами.

В алгебре  $\mathcal{G}$  содержатся конечномерные подпространства  $\mathcal{G}_n$ , порожденные графами с  $n$  вершинами (в качестве  $\mathcal{G}_0$  мы берем само поле  $\mathbb{C}$  — одномерное пространство, порожденное пустым графом). Их размерность равна числу (как связных, так и несвязных) графов с  $n$  вершинами. При малых  $n$  ее легко вычислить. Например,  $\dim \mathcal{G}_1 = 1$ ,  $\dim \mathcal{G}_2 = 2$ ,  $\dim \mathcal{G}_3 = 4$ . Однако при больших значениях  $n$  это вычисление становится сложной задачей. Пространства  $\mathcal{G}_n$  не просто содержатся в  $\mathcal{G}$ ; все пространство  $\mathcal{G}$  раскладывается в прямую сумму этих подпространств:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots \quad (11.2)$$

Это означает, что любой элемент  $g \in \mathcal{G}$  единственным образом представляется в виде суммы

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots,$$

где  $g_i \in \mathcal{G}_i$ , и лишь конечное число слагаемых в правой части отлично от нуля. Например, для элемента  $g$ , заданного равенством (11.1), имеем  $g_0 = 15$ ,  $g_4 = 7\pi K_4$ ,  $g_{11} = -(2 - e)C_5C_6$ ,  $g_{12} = \frac{3}{4}C_4^3 - K_{12}$ , а все остальные  $g_i$  равны нулю.

Умножение в  $\mathcal{G}$  устроено таким образом, что произведение элементов из  $\mathcal{G}_k$  и  $\mathcal{G}_l$  лежит в  $\mathcal{G}_{k+l}$ . Другими словами, разложение (11.2) является *градуировкой* алгебры  $\mathcal{G}$ , а умножение *согласовано* с этой градуировкой. Мы будем обозначать операцию умножения буквой  $m$  или, как обычно, просто записывать сомножители подряд. Правильно считать, что умножение является билинейным градуированным отображением тензорного квадрата алгебры в саму алгебру:

$$m : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}; \quad m : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_l \rightarrow \mathcal{G}_{k+l}.$$

Роль единицы алгебры  $\mathcal{G}$  играет пустой граф. Единицу можно понимать как гомоморфизм  $e : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ , который является изоморфизмом на  $\mathcal{G}_0$  и отображает в нуль все  $\mathcal{G}_i$  при  $i > 0$ ; этот гомоморфизм сопоставляет любому элементу в  $\mathcal{G}$  коэффициент при пустом графе в этом элементе.

### 11.1.2 Структура коалгебры

Понятия коалгебры, биалгебры и алгебры Хопфа возникли в топологии. Они уже появлялись у нас в теневом исчислении. В этом разделе мы опишем коалгебраическую структуру на пространстве графов. Естественная

структура коалгебры возникает на пространстве, двойственном к произвольной алгебре.

Если  $A$  — алгебра, то на двойственном к ней пространстве  $A^*$  (т.е. на пространстве линейных функционалов  $A \rightarrow \mathbb{C}$ ) имеется *коумножение*. Это операция

$$\mu : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*,$$

заданная следующим образом:

$$\mu(f)(a \otimes b) = f(m(a, b))$$

для любого элемента  $f \in A^*$  и любых  $a, b \in A$ . Очевидно, что коумножение линейно. Если при этом алгебра  $A$  градуирована,

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots,$$

то и алгебра  $A^*$  градуирована:

$$A^* = A_0^* \oplus A_1^* \oplus A_2^* \oplus \dots$$

(В случае, если градуировка содержит бесконечное число членов, это определение требует уточнения, но мы не будем им сейчас заниматься.) Коумножение согласовано с градуировкой двойственного пространства:

$$\mu : A_n^* \rightarrow (A_0^* \otimes A_n^*) \oplus (A_1^* \otimes A_{n-1}^*) \oplus \dots \oplus (A_n^* \otimes A_0^*).$$

В топологии обычно  $A$  — алгебра когомологий некоторого топологического пространства.

Иногда оказывается, что между алгеброй  $A$  и двойственным к ней пространством  $A^*$  можно установить естественный изоморфизм. Так бывает, например, если топологическое пространство компактно, и для его когомологий имеет место двойственность Пуанкаре. В таком случае мы получаем одно пространство  $A$  с двумя структурами — алгебры и коалгебры, или, как говорят, со структурой *биалгебры*. При этом умножение является гомоморфизмом структуры коалгебры, а коумножение — гомоморфизмом структуры алгебры, т.е.,

$$\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$$

для любой пары  $a, b$  элементов пространства  $A$ .

На алгебре графов  $\mathcal{G}$  структура коалгебры задается с помощью следующего коумножения. Для графа  $\Gamma$  и подмножества  $J \subset V(\Gamma)$  его вершин обозначим через  $J(\Gamma)$  *полный* подграф графа  $\Gamma$  на вершинах  $J$ , т.е. подграф, множество вершин которого совпадает с  $J$ , а множество ребер состоит из тех ребер графа  $\Gamma$ , оба конца которых лежат в  $J$ . Положим

$$\mu(\Gamma) = \sum_{I \sqcup J = V(\Gamma)} I(\Gamma) \otimes J(\Gamma). \quad (11.3)$$

В этой сумме столько слагаемых, сколько имеется упорядоченных разбиений множества вершин  $V(\Gamma)$  на два непересекающихся подмножества; тем



$$\begin{aligned} \mu(\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet) &= 1 \otimes \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet + 2 \bullet \otimes \bullet \text{---} \bullet + \bullet \otimes \bullet \bullet \\ &+ \bullet \bullet \otimes \bullet + 2 \bullet \text{---} \bullet \otimes \bullet + \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \otimes 1 \end{aligned}$$

Рис. 11.1: Копроизведение графа

самым, количество слагаемых равно  $2^{|V(G)|}$ . Пример копроизведения графа приведен на рис. 11.1.

*Коединица* задается гомоморфизмом  $\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{G}$ , который осуществляет изоморфизм  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{G}_0$ .

**Теорема 11.1.3.** *Пространство  $\mathcal{G}$  с введенными на нем умножением  $m$  и коумножением  $\mu$  является градуированной биалгеброй.*

Более того, эта биалгебра *коммутативна* и *кокоммутативна*, где кокоммутативность понимается в следующем смысле: образ  $\mu(g)$  любого элемента  $g \in \mathcal{G}$  переходит в себя при линейном отображении  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ , переставляющем сомножители в произведении,  $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ .

*Пример 11.1.4* (полные графы и леса). Подалгебра в  $\mathcal{G}$ , порожденная полными графами  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , выдерживает и коумножение. На полных графах коумножение имеет вид

$$\mu(K_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} K_i \otimes K_{n-i}.$$

Тем самым, отображение, переводящее  $K_n$  в  $s^n$ , продолжается до гомоморфизма из биалгебры, порожденной полными графами, в биалгебру многочленов от одной переменной. Этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Другой пример подалгебры в  $\mathcal{G}$  дает подалгебра *лесов* – линейных комбинаций графов без циклов. Действительно, копроизведение леса является линейной комбинацией тензорных произведений лесов.

## 11.2 Примитивные элементы

Некоторые элементы в биалгебре выглядят “проще” других. Они играют важную роль образующих биалгебры.

*Пример 11.2.1* (Полиномиальная биалгебра). Обобщим конструкцию биалгебры многочленов от одной переменной на случай многих переменных. Рассмотрим алгебру многочленов от  $n$  переменных  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . В ней легко ввести коумножение, положив  $\mu(x_l) = 1 \otimes x_l + x_l \otimes 1$  для любой переменной  $x_l$ . Это означает, что копроизведение монома  $y_1 \dots y_k$ , где каждый из

элементов  $y_i$  равен одному из  $x_i$ , равно

$$\mu(y_1 \dots y_k) = \sum_{I \sqcup J = \{1, \dots, k\}} \prod_{i \in I} y_i \otimes \prod_{j \in J} y_j.$$

Полиномиальная биалгебра градуирована: она раскладывается в прямую сумму своих однородных составляющих — подпространств однородных многочленов данной степени. Эту градуировку можно изменить, указав *вес* каждой переменной. Тогда полиномиальная биалгебра раскладывается в прямую сумму составляющих, однородных относительно выбранного веса. При этом число переменных может быть и бесконечным — требуется лишь, чтобы число переменных веса не выше  $N$  было конечно для любого значения  $N$ . В этом случае все взвешенные однородные составляющие будут иметь конечную размерность.

**Определение 11.2.2.** Элемент  $p$  биалгебры называется *примитивным*, если

$$\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1.$$

В частности, все переменные  $x_i$  в полиномиальной биалгебре являются примитивными. Это, однако, не единственные примитивные элементы в ней: любой линейный многочлен также является примитивным элементом. Вообще, примитивные элементы биалгебры образуют векторное пространство.

В градуированной биалгебре подпространство примитивных элементов также градуировано,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3 \oplus \dots,$$

где  $\mathcal{P}_i$  — подпространство примитивных элементов степени  $i$ . Обратите внимание на то, что градуировка примитивных элементов начинается с единицы, а не с нуля. Причина этого в том, что  $\mu(1) = 1 \otimes 1$ , поэтому 1, а значит и никакой другой элемент степени 0, не может быть примитивным элементом.

Если в каждом примитивном подпространстве данного веса в полиномиальной биалгебре вместо базиса из переменных выбрать любой другой базис, то полиномиальная биалгебра будет естественно изоморфна биалгебре многочленов в этом новом базисе. Следующая теорема, доказательства которой мы не приводим, утверждает, что такая же картина наблюдается в произвольной коммутативной кокоммутативной градуированной биалгебре.

**Теорема 11.2.3** (Милнор–Мур). *Выберем в произвольной коммутативной кокоммутативной градуированной биалгебре базис  $p_{i1}, \dots, p_{ik_i}$  в каждом из пространств  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ее однородных примитивных элементов. Тогда эта биалгебра естественно изоморфна градуированной полиномиальной биалгебре  $\mathbb{C}[p_{11}, \dots, p_{1k_1}, p_{21}, \dots]$  с градуировкой элемента  $p_{ij}$  равной  $i$ .*

**Замечание 11.2.4.** В полиномиальной биалгебре есть *антипод* — автоморфизм  $p \mapsto -p$ , переводящий каждый примитивный элемент в противоположный. Биалгебра с антиподом называется *алгеброй Хопфа*. Тем самым, все рассматриваемые ниже биалгебры являются алгебрами Хопфа. Мы, однако, будем, как правило, называть их просто биалгебрами.

Как вытекает из теоремы Милнора–Мура, биалгебра графов  $\mathcal{G}$  тоже является полиномиальной биалгеброй от своих примитивных элементов.

Помимо подпространства примитивных элементов каждая однородная составляющая градуированной биалгебры содержит подпространство *разложимых* элементов  $\mathcal{D}_n$ . Это подпространство порождено элементами, представимыми в виде произведения  $xy$ , где порядок каждого из элементов  $x, y$  меньше  $n$ . Другими словами, это подпространство многочленов веса  $n$ , не содержащих мономов степени 1. Это означает, что соответствующая однородная компонента раскладывается в прямую сумму  $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{D}_n$  примитивного и разложимого подпространств. Для биалгебры графов это замечание означает, в частности, что справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 11.2.5.** *Размерность пространства примитивных элементов  $\mathcal{P}(\mathcal{G}_n)$  порядка  $n$  в биалгебре графов равна числу связных графов с  $n$  вершинами.*

*Замечание 11.2.6* (о размерностях). По размерностям  $m_1, m_2, \dots$  однородных подпространств примитивных элементов однозначно восстанавливаются размерности однородных пространств биалгебры. Размерность  $n$ -го однородного подпространства равна коэффициенту при  $t^n$  в производящей функции

$$\frac{1}{(1-t)^{m_1}(1-t^2)^{m_2}(1-t^3)^{m_3}\dots}.$$

Эту же формулу можно использовать для восстановления значений  $m_i$ , если размерности однородных подпространств биалгебры известны.

Представимость однородного подпространства биалгебры в виде  $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{D}_n$  означает, что в этом подпространстве существует однозначно определенная проекция вдоль подпространства разложимых элементов на подпространство примитивных элементов. Для полиномиальной биалгебры проекция просто сопоставляет любому многочлену его линейную часть. Для биалгебры графов она выглядит следующим образом.

**Утверждение 11.2.7.** *Линейное отображение  $\pi_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$ , заданное формулой*

$$\pi_n : \Gamma \mapsto \Gamma - 1! \sum_{I_1 \sqcup I_2 = V(\Gamma)} I_1(\Gamma) I_2(\Gamma) + 2! \sum_{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 = V(\Gamma)} I_1(\Gamma) I_2(\Gamma) I_3(\Gamma) - \dots,$$

где суммирования в правой части идут по всем неупорядоченным разбиениям множества вершин  $V(\Gamma)$  графа  $\Gamma$  на непустые подмножества, является проектированием на подпространство примитивных элементов вдоль подпространства разложимых элементов.

*Пример 11.2.8.* Результат  $\pi_4(C_4)$  проектирования квадрата  $C_4$  изображен на рис. 11.2.

Проектирование на подпространство примитивных элементов является частным случаем следующей конструкции. Пусть  $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$  –

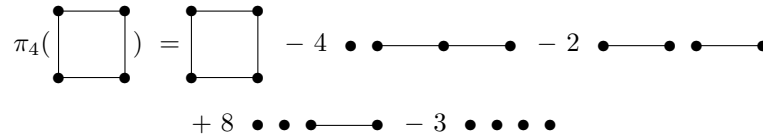


Рис. 11.2: Проектирование 4-цикла на подпространство примитивных элементов

градуированная биалгебра; рассмотрим пространство  $\text{Hom}(A, K)$  линейных отображений  $A \rightarrow K$ , где  $K$  – произвольная алгебра над  $\mathbb{C}$ . На этом пространстве можно ввести *произведение свертки*:

$$\varphi_1 \varphi_2(a) = (m_K(\varphi_1 \otimes \varphi_2))\mu(a),$$

где  $m_K$  – умножение в алгебре  $K$ . При наличии произведения мы можем рассматривать степенные ряды от линейных отображений. В частности, любое линейное отображение  $\varphi : A \rightarrow A$ , являющееся гомоморфизмом коалгебр, представимо в виде  $\varphi = 1 + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  принимает значение 0 на  $A_0$ . Поэтому определен логарифм

$$\log(\varphi) = \log(1 + \varphi_0) = \varphi_0 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \frac{1}{3}\varphi_0^3 - \dots$$

Действительно,  $\varphi_0$  принимает значение 0 на  $A_0$ , поэтому  $\varphi_0^2$  принимает значение 0 на  $A_0 \oplus A_1$ ,  $\varphi_0^3$  принимает значение 0 на  $A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ , и т.д. В результате для любого элемента  $a \in A$  лишь конечное число слагаемых в разложении  $\log(\varphi)a$  отлично от нуля, поэтому линейное отображение  $\log(\varphi) : A \rightarrow A$  корректно определено.

**Утверждение 11.2.9** (Шмитт). *Для любого линейного отображения  $\varphi : A \rightarrow A$ , являющегося гомоморфизмом коалгебр, его логарифм отображает  $A$  в подпространство примитивных элементов  $P(A)$ . Логарифм  $\log(I)$  тождественного отображения  $I : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  совпадает с проекцией  $\pi : \mathcal{G} \rightarrow P(\mathcal{G})$ .*

Например,

$$\log(I)(K_2) = I_0(K_2) - \frac{1}{2}I_0^2(K_2) = K_2 - K_1^2.$$

### 11.3 Факторалгебры биалгебры графов

В алгебре Хопфа графов образы связных графов при проектировании образуют базисы однородных пространств примитивных элементов. Связные графы устроены так же сложно, как и общие графы, и ничего хорошего

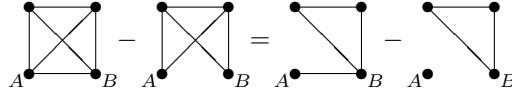


Рис. 11.3: 4-членное соотношение на графах с четырьмя вершинами

про них в целом сказать нельзя. Интерес представляют разумные фактор-биалгебры биалгебры графов по модулю некоторых линейных отношений эквивалентности. Придумать такие отношения — так чтобы фактор сохранил структуру биалгебры — совсем непросто. Например, соотношение Татта (10.2) не подходит для этой цели, поскольку у графа со стянутым ребром вершин меньше, чем у двух других графов, т.е. это соотношение не сохраняет градуировку. В этом параграфе мы обсудим линейные отношения эквивалентности, приводящие к обозримым факторалгебрам. Они обязаны своим происхождением теории узлов.

### 11.3.1 4-биалгебра

Эта биалгебра получается, если профакторизовать биалгебру графов по 4-членному соотношению

$$\Gamma - \Gamma'_{AB} = \tilde{\Gamma}_{AB} - \tilde{\Gamma}'_{AB}. \tag{11.4}$$

Здесь  $\Gamma$  — произвольный граф,  $A, B \in V(\Gamma)$  — произвольная упорядоченная пара вершин в нем. Граф  $\Gamma'_{AB}$  получен из  $\Gamma$  удалением ребра  $AB$ , если оно существует, и его присоединением в противном случае, т.е., изменением примыкания вершин  $A$  и  $B$ . Отметим, что соотношение (11.4) похоже на соотношение Татта — если мы стянем ребро  $AB$  в каждом из графов  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}_{AB}$ , то полученные графы будут различаться лишь кратностями некоторых ребер.

Операция  $\Gamma \mapsto \tilde{\Gamma}_{AB}$  меняет примыкание к вершине  $A$  всех вершин, соединенных с вершиной  $B$ , оставляя все прочие примыкания неизменными. Результат применения этой операции к графу  $K_4$  изображен на рис. 11.3. Заметим, что результат применения этой операции действительно может зависеть от порядка вершин  $A, B$ . Простейший пример дается квадратом с диагональю: у стороны этого квадрата два различных порядка вершин.

Профакторизуем биалгебру графов по 4-членным соотношениям. К счастью, они однородны — все слагаемые имеют одинаковое число вершин — и поэтому факторпространства  $\mathcal{F}_n$  пространств  $\mathcal{G}_n$  по 4-членным соотношениям сохраняют естественную градуировку.

**Утверждение 11.3.1.** *Факторпространство*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \dots$$

снабжено структурой градуированной биалгебры, унаследованной от биалгебры графов.

**Доказательство.** Мы должны проверить, что 4-членное соотношение (11.4) уважает умножение и коумножение в биалгебре графов. Для умножения это утверждение очевидно: 4-членное соотношение сохраняется после умножения всех четырех слагаемых на один и тот же граф. В случае коумножения проверим два случая. Множества вершин всех четырех графов отождествлены между собой; будем обозначать это множество через  $V$ . Член, отвечающий подмножеству  $I \subset V(\Gamma)$  в копроизведении графа  $\Gamma$ , будем обозначать через  $\mu_I(\Gamma)$ :

$$\mu_I(\Gamma) = I(\Gamma) \otimes J(\Gamma),$$

где  $J = V(\Gamma) \setminus I$ . Если обе вершины  $A, B$  попадают в одно подмножество  $I \subset V$ , то справедливо равенство

$$I(\Gamma) - I(\Gamma)'_{AB} = \widetilde{I(\Gamma)}_{AB} - \widetilde{I(\Gamma)'}_{AB},$$

а значит и равенство

$$I(\Gamma) - I(\Gamma'_{AB}) = I(\widetilde{\Gamma}_{AB}) - I(\widetilde{\Gamma}'_{AB}),$$

поскольку каждый член последнего равенства совпадает с соответствующим членом предыдущего. Для  $J = V \setminus I$  имеем

$$J(\Gamma) = J(\Gamma'_{AB}) = J(\widetilde{\Gamma}_{AB}) = J(\widetilde{\Gamma}'_{AB}).$$

Умножая все члены предыдущего равенства тензорно на этот общий множитель  $J(\Gamma)$ , мы приходим к нужному равенству

$$\mu_I(\Gamma) - \mu_I(\Gamma'_{AB}) = \mu_I(\widetilde{\Gamma}_{AB}) - \mu_I(\widetilde{\Gamma}'_{AB}).$$

Замена  $I$  на  $J$  оставляет равенство верным. Если же вершина  $A$  принадлежит множеству  $I$ , а вершина  $B$  — его дополнению  $J$ , то равенство даже упрощается:

$$\mu_I(\Gamma) = \mu_I(\Gamma'_{AB})$$

и то же для правой части. Суммируя члены  $\mu_I$  по всем  $I \subset V$ , мы приходим к требуемому равенству.  $\square$

*Пример 11.3.2.* На графах с двумя вершинами нетривиальных 4-членных соотношений нет. Пространство  $\mathcal{F}_2$  двумерно. Пространство примитивных элементов в нем одномерно и порождено разностью двух двувершинных графов.

На графах с тремя вершинами имеется одно нетривиальное четырехчленное соотношение, см. рис. 11.4. Поэтому пространство  $\mathcal{F}_3$  трехмерно. Подпространство примитивных элементов в нем одномерно и порождено элементом  $\pi_3(A_3)$ .

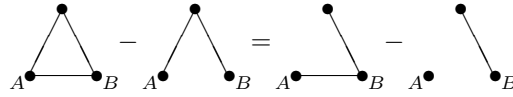


Рис. 11.4: 4-членное соотношение для графов с 3 вершинами

### 11.3.2 Взвешенные графы

Расставим в вершинах простого графа натуральные числа — *веса вершин*. Такой граф будем называть *взвешенным*. *Весом* графа называется сумма весов всех его вершин. Рассмотрим конечномерные пространства  $\mathcal{W}_n$ , порожденные графами веса  $n$ . Их прямая сумма

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots$$

наделена структурой градуированной биалгебры. И умножение, и коумножение задаются, как и в случае обычных графов.

Введем следующее отношение эквивалентности на множестве взвешенных графов:

$$\Gamma = \Gamma'_e + \Gamma''_e, \quad (11.5)$$

где  $e$  — произвольное ребро взвешенного графа  $\Gamma$ . Это соотношение полностью совпадает с соотношением Татта, однако в нем операция стягивания ребра  $\Gamma \mapsto \Gamma''_e$  имеет другой смысл. При стягивании ребра появившиеся кратные ребра заменяются однократными, а вес новой вершины полагается равным сумме весов тех вершин, из которых она образовалась. В результате соотношение (11.5) становится однородным: веса всех трех входящих в него графов одинаковы. Факторизуя биалгебру  $\mathcal{W}$  по соотношениям (11.5), мы получаем новую биалгебру

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots$$

Утверждение о том, что  $\mathcal{W}$  действительно является градуированной коммутативной кокоммутативной биалгеброй мы оставляем в качестве упражнения.

Покажем теперь, что взвешенные графы попали в этот раздел не зря: биалгебра  $\mathcal{W}$  является факторбиалгеброй биалгебры  $\mathcal{G}$ . Для этого определим гомоморфизм  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{W}$ , сопоставив каждому графу тот же взвешенный граф с весами всех вершин равными 1. Мы хотим показать, что композиция этого гомоморфизма с факторизацией по модулю соотношений (11.5) является эпиморфизмом биалгебр, а значит  $\mathcal{W}$  действительно является факторбиалгеброй биалгебры  $\mathcal{G}$ .

Начнем с доказательства структурной теоремы для биалгебры  $\mathcal{W}$ , аналогичной теореме Татта.

**Теорема 11.3.3.** Биалгебра  $\mathcal{W}$  изоморфна биалгебре многочленов  $\mathbb{C}[s_1, s_2, \dots]$ , градуированной присвоением переменной  $s_i$  веса  $i$ ,  $w(s_i) = i$ .

**Доказательство.** Как и в ситуации с соотношением Татта, каждый граф эквивалентен в  $\mathcal{W}$  линейной комбинации графов без ребер: в правой части соотношения (11.5) стоят графы с меньшим числом ребер, чем в левой части. Каждый взвешенный граф без ребер является несвязным объединением вершин некоторого веса. Сопоставив вершине веса  $i$  переменную  $s_i$ , мы сопоставляем графу веса  $n$  некоторый взвешенно-однородный многочлен веса  $n$  от переменных  $s_i$ . Единственное, что осталось доказать — это то, что сопоставление корректно определено. Это достигается указанием универсального инварианта:

$$W(\Gamma) = \sum_{\gamma} \prod_{\gamma_i} (-1)^{\beta_1(\gamma_i)} s_{w(\gamma_i)}.$$

Здесь суммирование идет по всем остовным подграфам  $\gamma$  графа  $\Gamma$ , т.е. по всевозможным подмножествам в  $E(\Gamma)$ , произведение берется по всем связным компонентам  $\gamma_i$  графа  $\gamma$ , а  $\beta_1(\gamma_i)$  — цикломатическое число графа.

Например, значение инварианта  $W$  на треугольнике  $C_3$  с весами вершин  $a, b, c$  равно

$$W(C_3) = s_a s_b s_c + s_{a+b} s_c + s_{a+c} s_b + s_{b+c} s_a + 2s_{a+b+c}.$$

Очевидно, что на одновершинном графе с вершиной веса  $n$  функция  $W$  принимает значение  $s_n$ . Проверку того, что  $W$  удовлетворяет соотношениям (11.5) и определяет, тем самым, линейный функционал на  $\mathcal{W}$ , мы оставляем читателям.

Для доказательства того, что построенный гомоморфизм  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{W}$  является эпиморфизмом, осталось проверить, что одновершинный граф произвольного веса  $n$  лежит в образе этого гомоморфизма. Для этого достаточно взять образ  $\pi_n(A_n)$  проекции на примитивные элементы графа-цепочки с  $n$  вершинами.  $\square$

**Утверждение 11.3.4.** Гомоморфизм биалгебры графов в биалгебру взвешенных графов по модулю соотношений (11.5) пропускается через 4-биалгебру графов, т.е. существует цепочка эпиморфизмов  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{W}$ .

**Доказательство** Нам достаточно доказать существование только второго гомоморфизма. В биалгебре взвешенных графов каждая из разностей в левой и правой частях 4-членного соотношения

$$\Gamma - \Gamma'_{AB} = \tilde{\Gamma}_{AB} - \tilde{\Gamma}'_{AB}$$

эквивалентна графу со стянутым ребром  $AB$ . Нетрудно видеть, что эти два графа совпадают, причем вес новой вершины в обоих случаях равен 2. Утверждение доказано.



## 11.4 4-инварианты

Построенный универсальный инвариант взвешенных графов полностью описывает структуру бигебры взвешенных графов и все мультипликативные линейные функционалы на ней. Однако ситуация с 4-бигеброй обстоит не так просто. Причина этого в том, что 4-членное соотношение не приводит, вообще говоря, к упрощению графа: графы  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}_{AB}$  могут иметь, скажем, одинаковое число ребер. В результате у нас нет неавтологического описания двойственной бигебры  $\mathcal{F}^*$  – бигебры 4-инвариантов. Поэтому особый интерес вызывает построение отдельных примеров и серий примеров 4-инвариантов. Мы будем определять 4-инварианты их значениями на графах, подразумевая что на линейные комбинации графов они продолжаются по линейности.

*Пример 11.4.1* (хроматический многочлен). Согласно наблюдению С. В. Дужина, хроматический многочлен является 4-инвариантом. Для проверки этого достаточно заметить, как мы сделали это в доказательстве утверждения 11.3.4, что в результате стягивания ребра  $AB$  в графах  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}_{AB}$  мы получаем, после замены кратных ребер однократными, одинаковые графы. Другими словами,  $\Gamma''_{AB} = \tilde{\Gamma}''_{AB}$ . Впрочем, хроматический многочлен – по существу единственный из инвариантов Татта, являющийся одновременно 4-инвариантом.

*Пример 11.4.2* (вершинные четырехугольники). Назовем *вершинным четырехугольником* в графе  $\Gamma$  набор из четырех вершин  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subset V(\Gamma)$ , таких что при некотором циклическом порядке  $(i, j, k, l)$  на множестве индексов  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  в графе есть ребра  $A_i A_j, A_j A_k, A_k A_l, A_l A_i$ . Тогда число  $Q^v(\Gamma)$  вершинных четырехугольников в графе  $\Gamma$  является 4-инвариантом.

Это утверждение можно проверить для четырехчленного соотношения на рис. 11.3: оба графа в левой его части содержат по единственному вершинному четырехугольнику, тогда как в графах в правой части таких четырехугольников нет.

Для его доказательства можно сначала проверить его на всех графах с четырьмя вершинами. Обозначим теперь через  $Q_4^v$  инвариант графов, равный числу вершинных четырехугольников на всех графах с четырьмя вершинами и нулю на всех остальных графах. Рассмотрим также графовый инвариант  $U$ , тождественно равный 1 на всех графах. Очевидно, что и функция  $Q_4^v$ , и функция  $U$ , являются 4-инвариантами. Поэтому их произведение свертки  $Q_4^v U$  тоже является 4-инвариантом. Непосредственная проверка показывает, что  $Q_4^v U = Q^v$ . Очевидно также, что этот инвариант мультипликативен.

Можно проверить, что  $Q^v$  является 4-инвариантом, и непосредственно. Разность значений этой функции на слагаемых в левой (соотв., правой) части 4-членного соотношения равна числу таких вершинных прямоугольников в  $\Gamma$  (соотв., в  $\tilde{\Gamma}_{AB}$ ), что соответствующий им набор ребер обязательно содержит ребро  $AB$ . Но, как нетрудно видеть, между такими прямоуголь-

никами в  $\Gamma$  и в  $\tilde{\Gamma}_{AB}$  существует естественное взаимно однозначное соответствие.

Приведенный пример является частным случаем следующего общего утверждения:

**Утверждение 11.4.3.** Если  $f$  – 4-инвариант графов с  $n$  вершинами,  $f \in \mathcal{F}_n^*$ , то функция

$$F(\Gamma) = \sum_J f(J(\Gamma)),$$

где суммирование идет по всем  $n$ -вершинным подмножествам множества  $V(\Gamma)$ , является 4-инвариантом графов.

*Замечание 11.4.4* (сложность вычисления). Инварианты описанного в этом утверждении типа, принимающие нулевое значение на несвязных графах, полиномиально вычислимы (что бы это ни значило). При фиксированном значении  $n$  сложность их вычисления растет пропорционально  $|V(\Gamma)|$ . Действительно, для их вычисления нужно проанализировать не все  $n$ -вершинные подграфы графа, а лишь все окрестности радиуса  $n$  каждой из его вершин.

*Пример 11.4.5* (реберные многоугольники по модулю 2). Реберным четырехугольником в графе  $\Gamma$  называется набор  $e_1, e_2, e_3, e_4$  различных ребер графа, образующих замкнутый путь в нем. Число реберных четырехугольников не является 4-инвариантом, однако взятое по модулю 2 оно становится 4-инвариантом. Например, в первом графе в левой части рис. 11.3 три реберных четырехугольника, во втором такой четырехугольник один, а в графах в правой части их вообще нет.

То же самое утверждение справедливо и для числа реберных  $n$ -угольников для любого  $n \geq 4$  (но не для  $n = 3$ ). Действительно, обозначим через  $E_k(\Gamma)$  число реберных  $k$ -угольников в  $\Gamma$ . Применяя эту функцию к обеим частям 4-членного соотношения, мы получим, что в правой (соотв., левой) его части стоит число реберных  $k$ -угольников в  $\Gamma$  (соотв., в  $\tilde{\Gamma}_{AB}$ ), содержащих ребро  $AB$ .

Во всяком таком  $k$ -угольнике есть цепочка  $CABD$ , и мы можем выделить три типа цепочек в зависимости от того, как  $C$  примыкает к  $B$ , а  $D$  примыкает к  $A$ :

- $C$  примыкает к  $B$ , а  $D$  примыкает к  $A$ ;
- $C$  примыкает к  $B$ , а  $D$  не примыкает к  $A$ ;
- $C$  не примыкает к  $B$ .

Реберные  $k$ -угольники в  $\Gamma$ , принадлежащие ко второму классу, находятся во взаимно-однозначном соответствии с  $k$ -угольниками в  $\tilde{\Gamma}_{AB}$ , содержащими путь  $CBAD$ . Реберные  $k$ -угольники третьего типа одинаковы в обоих графах. Наконец, реберные  $k$ -угольники первого типа разбиваются на пары: цепь  $CABD$  можно заменить цепью  $CBAD$ . Таким образом, число реберных  $k$ -угольников первого типа четно в обоих графах, и утверждение доказано.

*Пример 11.4.6* (совершенные паросочетания). Число совершенных паросочетаний в графе является 4-инвариантом. Проверку этого утверждения мы оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим, однако, что это не слишком мощный инвариант, так как он является экспонентой следующего очень простого 4-инварианта. Если мы положим  $m(\Gamma)$  равным 1 на графе с двумя вершинами и одним ребром, и 0 на всех остальных графах, то число совершенных паросочетаний дается экспонентой

$$e^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \dots$$

Умножение здесь понимается в смысле умножения свертки.

*Пример 11.4.7* (коранг матрицы примыканий). Если мы занумеруем произвольным образом вершины графа  $\Gamma$ , то мы можем сопоставить ему *матрицу примыканий*  $A(\Gamma)$  размера  $|V(\Gamma)| \times |V(\Gamma)|$ . На пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца этой матрицы стоит 1, если  $i$ -ая и  $j$ -ая вершина соединены ребром, и 0 в противном случае. На диагонали матрицы стоят нули.

Матрица примыканий симметрична. Мы рассматриваем элементы этой матрицы как элементы кольца  $\mathbf{Z}_2$ . Тогда *коранг* матрицы примыканий является 4-инвариантом. Разумеется, это утверждение справедливо и для ее ранга, однако в дальнейшем нам понадобится именно коранг. Доказательство основано на том, что коранг матрицы примыканий графа не меняется при переходе от  $\Gamma$  к  $\tilde{\Gamma}_{AB}$ . Действительно, если вершина  $A$  имеет номер 1, а вершина  $B$  – номер 2, то  $A(\tilde{\Gamma}_{AB}) = C^T A(\Gamma) C$ , где матрица  $C$  имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

а матрица  $C^T$  получается из  $C$  транспозицией.

## 11.5 Оснащенные модификации графовых алгебр

Рассмотрение матрицы примыканий графа и ее коранга показывает, что с точки зрения 4-инвариантов граф — не вполне естественный объект. Неестественность вызвана тем, что на диагонали матрицы примыканий обязательно стоят нули, в то время как остальные ее элементы могут быть как нулями, так и единицами. Естественно попробовать обобщить изложенные выше конструкции на *оснащенные графы* — графы, у которых каждой вершине приписан элемент кольца  $\mathbf{Z}_2$ , который может быть как нулем, так и единицей. Умножение и коумножение оснащенных графов определяются, как и в неоснащенном случае. В результате мы получаем бialгебру оснащенных графов  $\mathcal{G}^f$ .

Четырехчленное соотношение тоже переносится на оснащенные графы. Именно, мы сохраняем его прежний вид, причем действие операции  $\Gamma \mapsto \tilde{\Gamma}_{AB}$  понимается следующим образом: если оснащение вершины  $B$  равно 0, то операция выполняется точно так же, как и в неоснащенном случае. Если же оснащение вершины  $B$  равно 1, то дополнительно оснащение вершины  $A$  меняется на противоположное и примыкание вершин  $A$  и  $B$  заменяется противоположным. Такое определение операции полностью согласуется с ее пониманием как операции замены матрицы примыканий посредством преобразования  $C$ .

Мы оставляем читателю проверку того, что коумножение в  $\mathcal{G}^f$  уважает оснащенное 4-членное соотношение, и что, тем самым, определена градуированная факторбиалгебра

$$\mathcal{F}^f = \mathcal{F}_0^f \oplus \mathcal{F}_1^f \oplus \mathcal{F}_2^f \oplus \dots$$

Помимо того, что биалгебра  $\mathcal{F}^f$  представляет интерес сама по себе, важную роль играет наличие двух гомоморфизмов  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^f$ . Первый из них задается приписыванием нулевого оснащения каждой вершине графа  $\Gamma$ , второй менее тривиален. При втором гомоморфизме мы сопоставляем каждому графу  $\Gamma$  альтернированную сумму всех оснащенных графов с несущим графом  $\Gamma$ . Гипотетически этот гомоморфизм является вложением. Вне зависимости от того, так это или нет, поднятие относительно этого гомоморфизма всякого элемента двойственной биалгебры  $(\mathcal{F}^f)^*$  определяет 4-инвариант графов, и было бы чрезвычайно интересно понять, какие 4-инварианты имеют такое происхождение.

## 11.6 Задачи

*Задача 11.1.* Проверьте, что всякий примитивный элемент полиномиальной биалгебры является линейным многочленом.

*Задача 11.2.* Пусть  $p$  — примитивный элемент в градуированной алгебре Хопфа  $A$ . Докажите, что его экспонента  $q = e^p$  является групповым элементом, т.е.  $\mu(q) = q \otimes q$ . Наоборот, логарифм  $p = \ln q$  группового элемента является примитивным.

*Задача 11.3.* Пусть  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}[s]$  — произвольная биномиальная последовательность многочленов. Докажите, что линейное отображение  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}[s]$ , сопоставляющее каждому графу  $\Gamma$  многочлен  $p_{|V(\Gamma)|}$ , является гомоморфизмом градуированных коалгебр. Докажите, что никаких других гомоморфизмов градуированных коалгебр  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}[s]$  нет. Докажите, что такой гомоморфизм является гомоморфизмом градуированных биалгебр только в том случае, если  $p_n(s) = s^n$  для всех  $n$ .

*Задача 11.4.* Придумайте свои примеры градуированных подбиалгебр в биалгебре графов.

*Задача 11.5.* Найдите размерности пространств примитивных элементов а) в подбиалгебре, порожденной деревьями; б) в подбиалгебре, порожденной полными графами; в) в придуманных Вами примерах подбиалгебр.

*Задача 11.6.* Выпишите результаты проектирования связных графов с числом вершин не больше 4 на подпространство примитивных элементов. Проверьте, что их образы образуют базисы в соответствующих однородных пространствах примитивных элементов.

*Задача 11.7.* Докажите, что при  $n > 1$  сумма коэффициентов в представлении любого примитивного элемента порядка  $n$  алгебры графов в виде линейной комбинации графов равна нулю.

*Задача 11.8.* Подсчитайте размерности пространств  $\mathcal{F}_4$  и  $\mathcal{F}_5$ . Найдите размерности подпространств примитивных элементов в них и образующие в этих подпространствах.

*Задача 11.9.* Рассмотрим на пространстве графов линейные соотношения  $\Gamma = \tilde{\Gamma}_{AB}$  для любого графа  $\Gamma$  и любого ребра  $AB$  в нем. Докажите, что результат факторизации по этим соотношениям наделен естественной структурой градуированной коммутативной кокоммутативной биалгебры. Найдите размерности пространств примитивных элементов этой биалгебры.

*Задача 11.10.* Докажите, что хроматический многочлен любого примитивного элемента биалгебры графов линеен. Например, для проекции 4-цикла на подпространство примитивных элементов имеем

$$\begin{aligned} \chi_{\pi_4(C_4)}(c) &= \chi_{C_4}(c) - 4\chi_{A_1}(c)\chi_{A_3}(c) - 2\chi_{A_2}(c)^2 + 8\chi_{A_1}(c)^2\chi_{A_2}(c) - 3\chi_{A_1}(c)^4 \\ &= c(c-1)(c^2-3c+3) - 4c^2(c-1)^2 - 2c^2(c-1)^2 + 8c^3(c-1) - 3c^4 = -3c. \end{aligned}$$

В частности, значение хроматического многочлена на проекции любого графа на примитивные совпадает с линейным членом значения этого многочлена на самом графе.

*Задача 11.11.* Пусть  $N$  – формальная переменная. Покажите, что отображение  $\Gamma \mapsto N^{\text{corank } A(\Gamma)}$  является мультипликативным 4-инвариантом со значениями в  $\mathbb{C}[N]$ .

*Задача 11.12.* Найдите размерности пространств примитивных элементов в  $\mathcal{F}_k^f$  для  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Часть III

Языки, грамматики,  
автоматы

## Глава 12

# ЯЗЫКИ И КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

В этой главе мы начнем обсуждение формальных языков. Языки встречаются повсеместно и находят разнообразные применения. Естественные языки — те, на которых мы говорим и пишем, — очень сложны для изучения. Формальный же язык представляет собой просто множества слов в некотором алфавите. Формальный язык также может быть очень сложным. Однако мы ограничимся лишь языками с простой структурой. К таким языкам относятся, в частности, регулярные языки, которые распознаются конечными автоматами. Конечные автоматы — еще одно важное применение графов.

### 12.1 Язык Дика

Как мы знаем, правильные скобочные структуры перечисляются числами Каталана. Выпишем все правильные скобочные структуры до порядка 4:

()	(( ))	((( )))	(((( ))))	((( ))) ( )	( ) (( ) ( ))
$a b$	$a a b b$	$a a a b b b$	$a a a a b b b b$	$a a a b b b a b$	$a b a a b a b b$
	$( ) ( )$	$a a b a b b$	$a a a b a b b b$	$a a b a b b a b$	$a b a a b b a b$
	$a b a b$	$( ) ( ) ( )$	$( ( ) ) ( )$	$( ( ) ) ( ( ) )$	$( ) ( ) ( ( ) )$
		$a a b b a b$	$a a a b b a b b$	$a a b b a a b b$	$a b a b a a b b$
		$( ) ( ( ) )$	$( ( ) ) ( ( ) )$	$( ( ) ) ( ) ( )$	$( ) ( ) ( ) ( )$
		$a b a a b b$	$a a b a a b b b$	$a a b b a b a b$	$a b a b a b a b$
		$( ) ( ) ( b )$	$( ) ( ) ( ) ( )$	$( ) ( ( ) ) ( )$	$( ) ( ) ( ) ( )$
		$a b a b a b$	$a a b a b a b b$	$a b a a a b b b$	

Если обозначить левую скобку буквой  $a$ , а правую — буквой  $b$ , то можно переписать правильные скобочные структуры в виде "слов" в алфавите  $\{a, b\}$ . В приведенной выше таблице под каждой скобочной структурой записано соответствующее ей слово.

При такой записи мы получаем не все слова в алфавите  $\{a, b\}$ , а только некоторые. Например, слова  $a, b, aa, ba$  не соответствуют никаким правильным скобочным структурам.

**Определение 12.1.1.** Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  — произвольный конечный набор различных букв. *Словом* в алфавите  $A$  называется произвольная





Рис. 12.1: а) Конечный автомат и б) тот же автомат с выделенным принимающим состоянием

конечная последовательность букв  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$ , где  $\alpha_i \in A$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Число  $m$  называется *длиной слова*. *Языком* над алфавитом  $A$  называется произвольное (конечное или бесконечное) множество слов в алфавите  $A$ .

*Пустое слово*  $\lambda$  имеет длину 0 и может входить или не входить в язык.

*Пример 12.1.2.* Язык  $\mathcal{F}$  состоит из слов в алфавите  $\{a, b\}$ , не содержащих двух букв  $b$  подряд:  $\mathcal{F} = \{\lambda, a, b, ab, ba, aaa, aab, aba, baa, bab, aaaa, \dots\}$ .

Множество правильных скобочных структур вместе с пустой структурой образует язык над алфавитом  $\{a, b\}$ . Этот язык называется *языком Дика*. Конечно, тот же язык мы могли бы рассматривать и над алфавитом  $\{(\,)\}$ , состоящим из левой и правой скобки; просто символы  $a, b$  в нашем восприятии более соответствуют термину "буква".

## 12.2 Конечные автоматы

Посмотрим на граф с ориентированными ребрами, изображенный на рис. 12.1. Из каждой вершины этого графа выходит два ребра, одно из которых помечено буквой  $a$ , а другое — буквой  $b$ . Будем называть такой граф автоматом, а его вершины — состояниями. Состояния помечены прописными латинскими буквами.

В любой момент времени автомат находится в одном из состояний — мы будем называть это состояние текущим. При получении на вход буквы автомат переходит из текущего состояния в то, на которое указывает ребро, выходящее из текущего состояния и помеченное этой буквой. Тем самым, каждое слово в алфавите  $\{a, b\}$  можно воспринимать как "программу" для автомата: каждая буква в слове является командой, переводящей автомат из одного состояния в другое. Одно из состояний — то, в котором автомат находится до получения первой буквы, — называется начальным. Мы будем всегда помечать его буквой  $B$ .

Так, например, выглядит последовательность состояний автомата с рис. 12.1, на вход которого подано слово  $baabab$ :

$$B \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow B.$$

Количество состояний в этой последовательности на единицу больше числа букв во входном слове, а количество стрелок равно этому числу.

Можно пометить некоторые состояния в автомате как принимающие. Принимающие состояния мы будем обводить двойными кружками, см. рис. 12.1

б). Будем говорить, что автомат *принимает* слово  $w$ , если по окончании его обработки он оказывается в принимающем состоянии. В противном случае автомат не принимает слово. Например, автомат с рис. 12.1 б) принимает слово  $baabab$ , поскольку по окончании его обработки он оказывается в принимающем состоянии  $B$ , но не принимает слово  $a$ .

Каждому автомату с принимающими состояниями можно сопоставить язык принятых слов. Этот язык состоит из всех слов, принимаемых этим автоматом. Говорят, что автомат над алфавитом  $A$  *распознает язык*  $L$  над тем же алфавитом, если он принимает любое слово из языка  $L$  и не принимает никакое другое слово.

Например, автомат с рис. 12.1 б) распознает язык, состоящий из всех слов четной длины. Действительно, переходы из состояния  $B$  в состояние  $C$  и обратно не зависят от очередной буквы во входном слове. Поэтому окончательное состояние зависит лишь от длины слова, точнее — от четности этой длины.

Построим автомат, который распознает язык  $\mathcal{F}$  из примера 12.1.2 в предыдущем разделе.

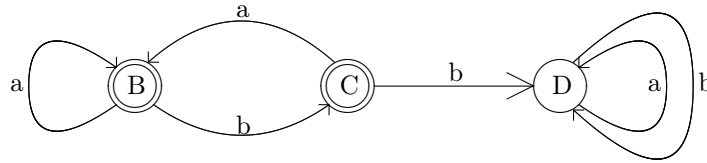
Для описания автомата мы должны описать набор его состояний, стрелки, указывающие переходы из одного состояния в другое в зависимости от буквы на входе, а также сказать, какие состояния являются принимающими. Наш автомат будет иметь три состояния:

- начальное состояние  $B$ ; автомат переходит в это состояние всякий раз, получая букву  $a$ , при условии, что в слове еще не встретились две буквы  $b$  подряд;
- состояние  $C$ , отвечающее ситуации, когда последней обработанной буквой в слове была буква  $b$ , при условии, что в слове еще не встретились две буквы  $b$  подряд;
- состояние  $D$ , отвечающее ситуации, когда в слове уже встретилось две буквы  $b$  подряд.

Теперь понятно, как строить и переходы между состояниями. Из состояния  $B$  мы переходим обратно в  $B$ , если на вход поступила буква  $a$ , и в  $C$ , если на входе буква  $b$ . Находясь в состоянии  $C$ , автомат переходит в состояние  $B$ , если на входе буква  $a$ , и в состояние  $D$ , если на вход подана буква  $b$  (что означает, что во входном слове встретились две буквы  $b$  подряд). Наконец, обе стрелки из состояния  $D$  ведут в то же состояние  $D$  — если в слове уже встретились две буквы  $b$  подряд, то его исправить нельзя.

Состояния  $B$  и  $C$  являются принимающими — автомат может находиться в одном из этих состояний только, если во входном слове не было подряд идущих букв  $b$ . Наоборот, автомат попадает в состояние  $D$  только, если во входном слове такие буквы были. Поэтому автомат с рис. 12.2 распознает язык  $\mathcal{F}$ .

Дадим теперь формальное определение конечного автомата и распознаваемого им языка.

Рис. 12.2: Конечный автомат, распознающий язык  $\mathcal{F}$ 

**Определение 12.2.1.** Автомат над данным алфавитом  $A$  представляет собой корневой ориентированный граф, ребра которого помечены буквами алфавита, такой, что для каждой буквы алфавита  $A$  из каждой вершины графа (состояния автомата) выходит ровно одно ребро, помеченное этой буквой. Автомат называется *конечным*, если соответствующий граф конечен. При *обработке* слова над алфавитом  $A$  автомат переходит из *начального состояния* (корня графа) в то, куда ведет путь из векторов, помеченных буквами этого слова.

**Определение 12.2.2.** Автомат над алфавитом  $A$ , среди состояний которого выделено подмножество *принимающих состояний*, *распознает язык  $L$*  над тем же алфавитом, если конечное его состояние при обработке любого слова языка  $L$  является принимающим, а при обработке любого другого слова — нет.

Отметим, что наряду с изображением конечного автомата с помощью графа его легко задавать таблицей. Строки в такой таблице помечены состояниями автомата, а столбцы — буквами алфавита. На пересечении строки и столбца указано состояние, в которое переходит автомат из состояния, которым помечена строка, в результате обработки буквы, которой помечен столбец. Например, автомат с рис. 12.2, распознающий язык  $\mathcal{F}$ , задается с помощью таблицы

	a	b
B	B	C
C	B	D
D	D	D

Такая таблица называется *таблицей перехода*. Чтобы информация, представленная в таблице перехода, описывала автомат полностью, необходимо добавить еще одну колонку, в которой про каждое состояние указано, является оно принимающим или нет.

Вовсе не всякий язык можно распознать конечным автоматом. Языки, распознаваемые конечными автоматами, называются *регулярными*. Например, язык  $\mathcal{F}$  является регулярным — мы построили распознающий его конечный автомат. Напротив, язык Дика регулярным не является. Для доказательства этого нам понадобится следующее определение.

**Определение 12.2.3.** Пусть  $u, v$  — два слова над алфавитом  $A$ . Мы будем говорить, что язык  $L$  над тем же алфавитом *различает* слова  $u$  и  $v$ ,

если существует слово  $x$  над  $A$ , такое, что одно из слов  $ux$  и  $vx$  принадлежит языку  $L$ , а другое — нет. Такие два слова  $u$  и  $v$  будем называть  $L$ -различимыми.

Очевидно, что все слова над алфавитом  $A$  разбиваются на классы попарно  $L$ -неразличимых слов. Действительно, если слова  $u, v$   $L$ -неразличимы и слова  $v, w$  также  $L$ -неразличимы, то и слова  $u, w$  также  $L$ -неразличимы, поэтому неразличимость является отношением эквивалентности. Отметим, что если  $u$  — слово языка  $L$ , а  $v \notin L$ , то слова  $u$  и  $v$   $L$ -различимы: в качестве  $x$  можно взять пустое слово.

**Теорема 12.2.4.** *Язык  $L$  над конечным алфавитом  $A$  является регулярным в том и только в том случае, если множество классов  $L$ -неразличимых слов над алфавитом  $A$  конечно.*

В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Действительно, предположим, что существует конечный автомат, распознающий язык  $L$ . После обработки любых двух  $L$ -различимых слов  $u, v$  этот автомат должен оказываться в двух различных состояниях — иначе обработка любых слов  $ux$  и  $vx$  закончится в одном и том же состоянии. Но это противоречило бы существованию слова  $x$ , для которого лишь одно из слов  $ux$  и  $vx$  принадлежит языку  $L$ .

С другой стороны, если множество классов  $L$ -неразличимых слов над  $A$  конечно, то возьмем эти классы в качестве состояний автомата. Пусть  $C$  — одно из состояний. Для любого слова  $u \in C$  и любой буквы  $a \in A$  направим стрелку  $a$  из  $C$  в состояние, содержащее слово  $ua$ . Понятно, что конечное состояние не зависит от того, с какого слова  $u$  мы начинали. Объявим теперь принимающими те состояния, которые содержат слова языка  $L$ . Как мы видели выше, эти состояния не могут содержать слов, не входящих в язык. Тем самым мы построили конечный автомат, распознающий язык  $L$ . Очевидно также, что число его состояний минимально возможно.  $\square$

Количество классов  $\mathcal{D}$ -неразличимых слов, где  $\mathcal{D}$  — язык Дика, бесконечно. Действительно, любые два слова  $u$  и  $v$  различной длины, состоящие только из букв  $a$ , принадлежат различным классам: если длина слова  $u$  равна  $\ell$  и мы припишем к нему слово длины  $\ell$ , состоящее только из букв  $b$ , то получим слово из языка Дика, а приписывание того же слова к слову  $v$  не даст слова языка Дика. Поэтому язык Дика не распознается конечным автоматом, а значит, нерегулярен.

## 12.3 Автоматы со стеком

Нельзя ли так подправить понятие автомата, чтобы автомат, распознающий язык Дика, все-таки можно было построить? Оказывается, это сделать несложно. Для этого можно снабдить автомат простой памятью — стеком. Перед началом работы автомата стек пуст. В стек можно класть обрабатываемые автоматом буквы алфавита, однако в любой момент он обеспечивает

доступ только к последней положенной в него букве — вершине стека. Тем самым, стек похож на детскую пирамидку с центральным стержнем, на которую можно сверху класть кружкí (или на магазин с патронами у боевого автомата). Букву с вершины стека можно снять, тогда верхней становится предыдущая положенная буква — или стек остается пустым. С пустого стека нельзя ничего снять — при попытке сделать это автомат ломается.

Изобразим автомат со стеком, распознающий язык Дика, с помощью таблицы перехода:

	$a$	$b$ , стек пуст	$b$ , стек непуст
В	В, положить $a$ в стек	D	В, снять верхушку стека
D	D	D	D

В автомате со стеком переходы зависят не только от текущего состояния автомата и входного символа, но и от значения верхушки стека. В нашем случае состояние D — не принимающее. Автомат может попасть в состояние D только, если в некоторой начальной части входного слова оказалось больше закрывающих скобок, чем открывающих. Такое слово не может быть правильной скобочной структурой, каким бы ни был его конец. В любой момент обработки слова в стеке содержится столько букв  $a$ , каков скобочный итог (т.е., разность между числом левых и числом правых скобок) обработанной части слова. Состояние В является принимающим только, если стек пустой. Если же конечное состояние автомата это состояние D или В при непустом стеке, то слово не принято.

Рассмотрим еще один пример распознавания языка конечным автоматом со стеком. Пусть  $\mathcal{P}'$  — язык двухбуквенных палиндромов над алфавитом  $\{a, b, c\}$ , т.е. слов нечетной длины, средняя буква в которых есть  $c$ , других букв  $c$  нет, причем слово одинаково читается слева направо и справа налево. Язык  $\mathcal{P}'$  начинается со слов

$$c, aca, bcb, aaca, abcba, bacab, bbcbb, \dots$$

Язык  $\mathcal{P}'$  можно распознать посредством следующего автомата со стеком:

	$a$ , в стеке $a$	$b$ , в стеке $b$	$c$	$a$ , в стеке не $a$	$b$ , в стеке не $b$
В	В, положить $a$ в стек	В, положить $b$ в стек	С	В, положить $a$ в стек	В, положить $b$ в стек
С	С, снять верхушку стека	С, снять верхушку стека	D	D	D
D	D	D	D	D	D

Состояния В и С являются принимающими только, если стек пуст. Во всех остальных случаях они отвергают входное слово, так же, как и состояние D — вне зависимости от состояния стека. Автомат переходит в состояние С, когда во входном слове впервые встретилась буква  $c$ . После этого он либо остается в состоянии С, либо переходит в состояние D — если во входном слове обнаружилось нарушение палиндромности.

## 12.4 Задачи

*Задача 12.1.* Выпишите последовательность состояний автомата с рис. 12.2 при обработке строки а)  $abaabbaab$ ; б)  $baabaaba$ .

*Задача 12.2.* Для каждого из автоматов с рис.12.3 постройте минимальный автомат, принимающий тот же язык.

Рис. 12.3: Конечные автоматы

*Задача 12.3.* Покажите, что все слова, не являющиеся началами никаких слов из данного языка  $L$ ,  $L$ -неразличимы.

*Задача 12.4.* Докажите, что слово языка  $L$  и слово, не входящее в  $L$ , не могут быть  $L$ -неразличимы.

*Задача 12.5.* Приведите пример языка, некоторые слова которого различимы им самим.

*Задача 12.6.* Для каждого из следующих языков докажите, что они нерегулярны: а)  $\{a^n b a^{2n} | n \geq 0\}$ ; б)  $\{a^i b^j a^k | i + j < k\}$ ; в) язык слов в алфавите  $\{a, b\}$ , в которых никакое начало не содержит больше букв  $b$ , чем  $a$ .

*Задача 12.7.* Для каждого из следующих языков над алфавитом  $\{a, b\}$  решите, регулярен он или нет; постройте конечные автоматы для распознавания регулярных языков и докажите нерегулярность остальных: а) язык слов, начинающихся с  $ww$ , где  $w$  — произвольное слово ненулевой длины; б) язык слов, содержащих внутри себя слово  $ww$ , где  $w$  — произвольное слово ненулевой длины; в) язык слов нечетной длины, средняя буква в которых  $a$ ; г) язык слов четной длины, две средние буквы в которых одинаковы; д) язык слов вида  $xux$ , где  $x$  — произвольное слово ненулевой длины; е) язык слов, не являющихся палиндромами.

*Задача 12.8.* Постройте конечный автомат, распознающий слова, длина которых кратна трем.

*Задача 12.9.* Пусть язык  $L$  над алфавитом  $A$  регулярен. Верно ли, что язык  $\bar{L}$  над тем же алфавитом, состоящий из слов, не входящих в  $L$ , также регулярен?

*Задача 12.10.* Выпишите последовательность состояний автомата со стеком, распознающего язык Дика, при обработке строки а)  $aababbab$ ; б)  $abaabbbaba$ .

*Задача 12.11.* Постройте конечный автомат со стеком, распознающий язык над алфавитом  $\{a, b\}$ , состоящий из слов, в которых букв  $a$  больше, чем букв  $b$ .

*Задача 12.12.* Выпишите таблицы перехода для автоматов со стеками, распознающих следующие языки над алфавитом  $\{a, b\}$ : а) язык слов, в которых одинаковое количество букв  $a$  и  $b$ ; б) язык слов, в которых различное количество букв  $a$  и  $b$ ; в) язык слов вида  $\{a^n b^{n+m} a^m \mid m, n \geq 0\}$ .

## Глава 13

# Языки и формальные грамматики с однозначным выводом

Конечные автоматы — удобное средство для проверки принадлежности данного слова данному языку. Однако они непригодны для выписывания всех слов данного языка. Для этого предназначены формальные грамматики. Формальные грамматики с однозначным выводом являются замечательным инструментом для подсчета всех слов данной длины в языке, т.е. для решения перечислительных задач.

### 13.1 Правила вывода в языке Дика

Выписывание всех скобочных структур данной длины — трудоемкий процесс. Чтобы не пропустить ни одной структуры и не повторить никакую структуру дважды, этот процесс надо упорядочить. Один из способов добиться упорядочения состоит в том, чтобы рассмотреть два *правила вывода в языке Дика*:

$$\begin{array}{l} 1) \quad r \longrightarrow \lambda; \\ 2) \quad r \longrightarrow arbr. \end{array} \quad (13.1)$$

Здесь  $r$  — буква, не входящая в алфавит  $\{a, b\}$ . Вместо нее мы могли бы выбрать любую букву, отличную от  $a$  и  $b$ .

Стрелка в правилах вывода (13.1) заменяет фразу:

*если в слове есть буква  $r$ , то эту букву можно заменить на слово, стоящее справа от стрелки.*

Покажем, как работают правила вывода: выведем по этим правилам заданную скобочную структуру.

Пусть нам нужно вывести слово  $aabaabb$ , т.е. правильную скобочную



структуру  $((()()))$ . Вот, как выглядит вывод:

$$\begin{aligned} \underline{r} &\xrightarrow{2)} ar\underline{br} \xrightarrow{1)} a\underline{r}b \xrightarrow{2)} aa\underline{r}brb \xrightarrow{1)} aa\underline{abr}b \xrightarrow{2)} aa\underline{abar}brb \xrightarrow{1)} \\ &aa\underline{abar}bb \xrightarrow{2)} aa\underline{abaar}brbb \xrightarrow{1),1)} aa\underline{aba}abb \end{aligned}$$

Над каждой стрелкой в процессе вывода написан номер примененного правила. Буква  $r$ , к которой применялось правило, подчеркнута.

Правила вывода в языке Дика можно понимать следующим образом:

*Всякое слово в языке Дика есть либо*

1) *пустое слово,*  
либо

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

Ясно, что для каждого слова языка Дика такое представление единственно.

Характеристикой числа слов в языке является его производящая функция.

**Определение 13.1.1.** *Производящей функцией языка  $L$  называется производящая функция*

$$L(s) = l_0 + l_1s + l_2s^2 + \dots,$$

где  $l_k$  есть число слов длины  $k$  в языке  $L$ .

Вычислим с помощью правил вывода производящую функцию для языка Дика. Для этой цели выпишем “некоммутативный производящий ряд”, перечисляющий слова языка. Этот ряд представляет собой просто формальную сумму всех слов языка, выписанных в порядке возрастания длины:

$$\mathcal{D}(a, b) = \lambda + ab + aabb + abab + aaabbb + aababb + \dots \quad (13.2)$$

**Теорема 13.1.2.** *Ряд (13.2) удовлетворяет уравнению*

$$\mathcal{D}(a, b) = \lambda + a\mathcal{D}(a, b)b\mathcal{D}(a, b). \quad (13.3)$$

**Доказательство.** Действительно, в левой части равенства (13.3) записана сумма всех слов языка Дика. Равенство означает справедливость утверждения

*Всякое слово в языке Дика есть либо*

1) *пустое слово,*  
либо

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

При этом такое представление единственно. Теорема доказана.  $\square$

Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку  $a = s$ ,  $b = s$ ,  $\lambda = s^0 = 1$ . Уравнение (13.3) примет вид

$$\mathcal{D}(s, s) = 1 + s^2 \mathcal{D}(s, s).$$

Отсюда, обозначив  $\mathcal{D}(s, s)$  через  $d(s)$ , получим

$$d(s) = 1 + s^2 d^2(s). \quad (13.4)$$

Решение

$$d(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2}}{2s^2}$$

этого уравнения, конечно же, совпадает (с точностью до возведения формальной переменной в квадрат) с производящей функцией для чисел Каталана (3.3). Необходимость подстановки переменной  $s^2$  вместо  $s$  объясняется тем, что в языке Дика длина слова, составленного из  $n$  пар скобок, равна  $2n$ , тогда как ранее мы перечисляли эти слова по числу *пар* скобок.

## 13.2 Формальные грамматики с однозначным выводом

Приведем обобщение рассуждения из предыдущего раздела.

**Определение 13.2.1.** Слово  $w = \beta_1 \dots \beta_m$  языка  $L$  называется *неразложимым* в этом языке, если никакое его непустое подслово  $\beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_{i+l}$ ,  $1 \leq i, i+l \leq m$ ,  $l \geq 0$ , отличное от самого слова  $w$ , не принадлежит языку  $L$ .

В частности, пустое слово в любом языке неразложимо. Предположим, что язык  $L$  обладает следующими свойствами

- 1) пустое слово входит в язык  $L$ ;
- 2) начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;
- 3) если между любыми двумя буквами любого слова языка  $L$  вставить слово языка  $L$ , то получится слово языка  $L$ ;
- 4) если из любого слова языка  $L$  выкинуть подслово, входящее в язык  $L$ , то получится слово языка  $L$ .

(13.5)

Обозначим через  $n(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \dots$  производящую функцию для числа неразложимых слов языка  $L$ , через  $l(s) = l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + \dots$  — производящую функцию для языка  $L$ .

**Теорема 13.2.2.** *Производящая функция для языка  $L$ , удовлетворяющего условиям (13.5), и производящая функция для подязыка неразложимых слов в нем связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$l(s) = n(sl(s)). \quad (13.6)$$

Воспользовавшись теоремой Лагранжа, мы заключаем, что производящая функция для числа неразложимых слов в языке, удовлетворяющем условиям (13.5), и производящая функция самого языка восстанавливаются друг по другу. Более того, та же теорема дает явное выражение коэффициентов одной из этих функций через коэффициенты другой.

**Доказательство.** Каждому неразложимому слову  $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_m}$  в языке  $L$  сопоставим правило вывода

$$r \longrightarrow \alpha_{i_1} r \alpha_{i_2} r \dots \alpha_{i_m} r.$$

Ясно, что каждое слово языка допускает вывод по этим правилам. Такой вывод однозначен. Действительно, пусть  $\beta_1 \dots \beta_k$  — произвольное слово языка  $L$ . Если оно неразложимо, то оно представляется в виде правой части правила вывода

$$r \longrightarrow \beta_1 r \beta_2 r \dots \beta_k r,$$

где каждое вхождение символа  $r$  следует заменить на пустое слово. Из определения неразложимого слова вытекает, что такое представление единственно.

Предположим теперь, что есть разложимые слова, допускающие различное представление. Рассмотрим самое короткое такое слово  $w$ . В нем содержится неразложимое подслово. Выберем из всех неразложимых подслов слова  $w$  самое правое (это возможно, так как неразложимые подслова не могут пересекаться) и выкинем его из слова  $w$ . Получим новое слово  $w'$ . Это слово имеет те же самые представления в виде правых частей правил вывода, что и слово  $w$ . Поэтому  $w'$  — более короткое слово, допускающее несколько различных представлений. Полученное противоречие доказывает единственность представления.

Таким образом, некоммутативная производящая функция для языка  $L$  удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) = \lambda + \alpha_{11} \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \alpha_{12} \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \dots + \dots$$

Делая подстановку  $\lambda = 1$ ,  $a_i = t$  и учитывая, что  $l(t) = \mathcal{L}(t, t, \dots, t)$ , получаем заключение теоремы.  $\square$

*Пример 13.2.3.* Для языка Дика  $n(t) = 1 + t^2$ . Неразложимые слова — это  $\lambda$  и  $ab$ . Отсюда немедленно получаем уравнение (13.4) на производящую функцию для языка Дика.

Одного символа зачастую бывает недостаточно для построения грамматики. Дадим формальное определение грамматики.

**Определение 13.2.4.** Пусть  $R = \{r_1, \dots, r_l\}$  — конечное множество символов, не входящих в алфавит  $A$ . *Правилом вывода* называется запись вида

$$r_i \longrightarrow w,$$

где  $r_i \in R$ , а  $w$  — слово в алфавите  $A \sqcup R$ . Множество  $\Gamma$  (конечное или бесконечное) правил вывода

$$\begin{array}{l} r_1 \longrightarrow w_{11} \\ r_1 \longrightarrow w_{12} \\ \dots \\ r_l \longrightarrow w_{l1} \\ r_l \longrightarrow w_{l2} \\ \dots \end{array}$$

называется (*контекстно свободной*) *грамматикой* (над алфавитом  $A$ ). Слово в алфавите  $A$  *порождается* символом  $r_i$ , если оно может быть получено цепочкой подстановок, задаваемых грамматикой, из символа  $r_i$ . Язык  $L_i$  *порождается* символом  $r_i$ , если все слова языка  $L_i$  и только они порождаются символом  $r_i$ . Грамматика  $\Gamma$  является *грамматикой с однозначным выводом*, если каждое слово, выводимое из символа  $r_i$ , единственным образом представляется в виде правой части одного из правил вывода  $r_i \longrightarrow w_{ik}$ .

В связи с задачами перечисления наибольший интерес для нас представляют формальные грамматики с однозначным выводом. Такая грамматика была построена для языка Дика. Приведем еще один подобный пример.

*Пример 13.2.5.* Рассмотрим язык  $\mathcal{F}$  из примера 12.1.2. Он состоит из слов в алфавите  $\{a, b\}$ , не содержащих подряд идущих букв  $b$ . Вот возможная грамматика для этого языка:

$$\begin{array}{l} r_1 \longrightarrow \lambda \\ r_1 \longrightarrow b \\ r_1 \longrightarrow r_2 b \\ r_1 \longrightarrow r_2 \\ r_2 \longrightarrow r_1 a \end{array}$$

Язык  $\mathcal{F}$  выводится из символа  $r_1$ . Из символа  $r_2$  выводится подязык языка  $\mathcal{F}$ , состоящий из слов, заканчивающихся на  $a$ .

Приведенная грамматика читается так:

1. всякое слово языка  $\mathcal{F}$  есть либо пустое слово, либо слово  $b$ , либо слово языка  $\mathcal{F}$ , кончающееся на  $a$ , к которому приписана буква  $b$ , либо слово языка  $\mathcal{F}$ , кончающееся на  $a$ ;
2. всякое слово языка  $\mathcal{F}$ , кончающееся на  $a$ , есть некоторое слово языка  $\mathcal{F}$ , к которому приписана буква  $a$ .

Она однозначна — каждое слово языка  $\mathcal{F}$  может служить правой частью только одного из правил вывода.

*Пример 13.2.6.* Приведем пример грамматики с неоднозначным выводом. Грамматика

$$\begin{aligned} r &\longrightarrow \lambda \\ r &\longrightarrow arb \\ r &\longrightarrow rarb \end{aligned}$$

выводит язык Дика. Однако некоторые слова в этом языке допускают представление в виде правой части как второго, так и третьего правил вывода. Это в точности те слова, в которых парной правой скобкой к первой левой скобке является последняя скобка слова. Тем самым, каждое такое слово может быть выведено несколькими различными способами, и грамматика как таковая не позволяет составить уравнение на производящую функцию языка Дика.

**Теорема 13.2.7.** Пусть  $\Gamma$  — грамматика с однозначным выводом для языка  $L$ . Обозначим через  $r_i(s)$  производящую функцию для числа слов в языке  $L$ , выводимых из символа  $r_i$  (т.е. производящую функцию для подязыка  $L_i$ ). Тогда производящие функции  $r_i$  удовлетворяют системе уравнений

$$r_i(s) = \sum_j s^{\nu_{ij}} \prod_k r_k^{\eta_{kj}}(s).$$

В частности, если число правил вывода конечно, то функции  $r_i$  удовлетворяют системе полиномиальных уравнений и поэтому являются алгебраическими функциями.

**Доказательство.** Поступим, как и в ситуации с одним порождающим символом, — введем некоммутативные производящие степенные ряды для числа слов, порождаемых каждым из символов  $r_i$ . Ввиду однозначности представления каждого слова в виде правой части правила вывода получаем систему уравнений на некоммутативные ряды. Делая подстановку  $\lambda = s^0 = 1$ ,  $a_i = s$  при  $i = 1, \dots, m$ , получаем систему уравнений на производящие функции для числа слов. Теорема доказана.  $\square$

### 13.3 Производящие функции регулярных языков

Производящая функция для чисел Фибоначчи рациональна — она представляется в виде отношения двух многочленов. С другой стороны, она является производящей функцией для языка  $\mathcal{F}$  из примера 12.1.2, распознаваемого конечным автоматом. В этом разделе мы покажем, что такая ситуация является общей.

**Теорема 13.3.1.** Производящая функция любого регулярного языка рациональна.

**Доказательство.** Пусть язык  $\mathcal{L}$  над алфавитом  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  регулярен; рассмотрим распознающий его конечный автомат, и пусть  $R =$

$\{r_1, \dots, r_l\}$  — множество состояний этого автомата, причем состояние  $r_1$  начальное. Сопоставим каждому состоянию  $r_i$  автомата и каждой входящей в это состояние стрелке  $a_m$  правило вывода

$$r_i \longrightarrow r_j a_m,$$

если стрелка  $a_m$  выходит из состояния  $r_j$ . (Отметим, что состояние  $r_j$  может совпадать с состоянием  $r_i$ .) Дополнительно сопоставим начальному состоянию  $r_1$  автомата правило вывода

$$r_1 \longrightarrow \lambda.$$

Полученный набор правил вывода задает грамматику с однозначным выводом. Действительно, язык  $\mathcal{L}_i$  слов, выводимых из символа  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  состоит из слов, обработка которых автоматом заканчивается в состоянии  $r_i$ . Поэтому каждое слово над  $A$  представимо в виде правой части лишь одного из правил вывода. При замене некоммутативной производящей функции на коммутативную мы получаем систему линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами на производящие функции  $L_i$  языков  $\mathcal{L}_i$ . По правилу Крамера решение такой системы дается рациональными функциями. Каждая такая функция является отношением двух определителей, каждый из которых представляет из себя многочлен. Суммируя эти рациональные функции по всем принимающим состояниям автомата, мы получаем рациональную производящую функцию для нашего регулярного языка.  $\square$

## 13.4 Представления производящих функций в виде непрерывных дробей

Производящая функция для чисел Каталана удовлетворяет квадратному уравнению (3.2)

$$s^2 \text{Cat}^2(s) - \text{Cat}(s) + 1 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\text{Cat}(s) - s^2 \text{Cat}^2(s) = 1,$$

или

$$\text{Cat}(s) = \frac{1}{1 - s^2 \text{Cat}(s)}. \quad (13.7)$$

Подставив выражение для  $\text{Cat}(s)$  из левой части равенства (13.7) в правую часть того же равенства, получим

$$\text{Cat}(s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - s^2 \text{Cat}(s)}}.$$

Подставляя вновь выражение (13.7) для  $\text{Cat}(s)$  в получившееся равенство и продолжая этот процесс, мы получаем представление для функции Каталана в виде *непрерывной дроби*:

$$\text{Cat}(s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{s^2}{1 - \dots}}}. \quad (13.8)$$

Полученное разложение нужно понимать следующим образом. Если мы оборвем непрерывную дробь на  $n$ -м шаге (оставив вместо нее конечную непрерывную дробь, которая представляет собой рациональную функцию), то коэффициенты разложения полученной функции по степеням  $s$  будут совпадать с коэффициентами разложения функции  $\text{Cat}(s)$  вплоть до члена  $s^{2n}$ . Заметим, что из-за наличия множителя  $s^2$  в числителе очередной дроби, присоединяемой на  $(n+1)$ -м шаге, увеличение числа членов в непрерывной дроби не приводит к изменению первых  $n$  коэффициентов в ее разложении. Например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - s^2} &= 1 + s^2 + s^4 + s^6 + s^8 + \dots \\ \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - s^2}} &= 1 + s^2 + 2s^4 + 4s^6 + 8s^8 + \dots \\ \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{s^2}{1 - s^2}}} &= 1 + s^2 + 2s^4 + 5s^6 + 13s^8 + \dots \\ \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{s^2}{1 - s^2}}}} &= 1 + s^2 + 2s^4 + 5s^6 + 14s^8 + \dots \end{aligned}$$

Стабилизирующаяся часть разложения выделена.

Представление функции Каталана в виде непрерывной дроби тесно связано с двумя способами ее получения — перечислением путей по треугольнику Дика (раздел 3.3) и с помощью производящей грамматики (раздел 13.1). Подобное представление можно распространить и на другие функции, перечисляющие различные пути.

Вспомним треугольник Дика с кратностями (рис. 4.5), в основании которого лежат числа Эйлера. Сейчас мы построим непрерывную дробь, отвечающую этому треугольнику.

**Теорема 13.4.1.** *Производящая функция*

$$F_0(s) = 1 + s^2 + 5s^4 + 61s^6 + 1385s^8 + \dots$$

для нижней стороны треугольника с рис. 4.5 представляется в виде непрерывной дроби

$$F_0(s) = \frac{1}{1 - \frac{1^2 s^2}{1 - \frac{2^2 s^2}{1 - \frac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}.$$

**Доказательство.** Производящая функция  $F_0(s)$  перечисляет различные пути с началом и концом на высоте 0. Обозначим через  $F_i(s)$  производящую функцию, перечисляющую пути с началом и концом на высоте  $i$ , которые не опускаются ниже уровня  $i$ , по их длине. Тогда

$$F_0(s) = \frac{1}{1 - s^2 F_1(s)}.$$

Действительно, каждый путь с началом и концом на высоте 0 единственным образом разбивается на такие участки, что

1. концы пути на каждом участке лежат на высоте 0;
2. высота всех промежуточных точек пути на каждом участке больше нуля.

Если отбросить начальный и конечный отрезок такого участка, то мы получим путь, начинающийся и заканчивающийся на высоте 1.

Аналогично,

$$F_1(s) = \frac{1}{1 - 4s^2 F_2(s)}.$$

Появление четверки в коэффициенте при  $s^2$  объясняется тем, что к данному пути, начало и конец которого лежат на высоте 2, начальный и конечный векторы, превращающие его в путь на высоте 1, можно добавить четырьмя “различными” способами.

Продолжая это рассуждение, мы заключаем, что

$$F_k(s) = \frac{1}{1 - (k+1)^2 s^2 F_{k+1}(s)},$$

и непрерывная дробь теперь выписывается очевидным образом:

$$\begin{aligned} F_0(s) &= \frac{1}{1 - s^2 F_1(s)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - 4s^2 F_2(s)}} \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{4s^2}{1 - \frac{9s^2}{1 - \dots}}}}. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы непосредственно вытекает, что распределение кратностей по восходящему и нисходящему векторам пути в каждом слое не имеет значения. Необходимо лишь, чтобы произведение этих кратностей внутри каждого слоя было постоянным. Например, треугольник, изображенный на рис. 13.1, порождает ту же производящую функцию для путей с нулевой высотой начала и конца, что и треугольник с рис. 4.5 а). Заметим, что то же справедливо и для путей на других высотах.



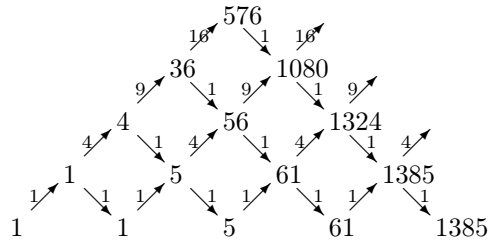


Рис. 13.1: Другая расстановка кратностей в треугольнике Дика

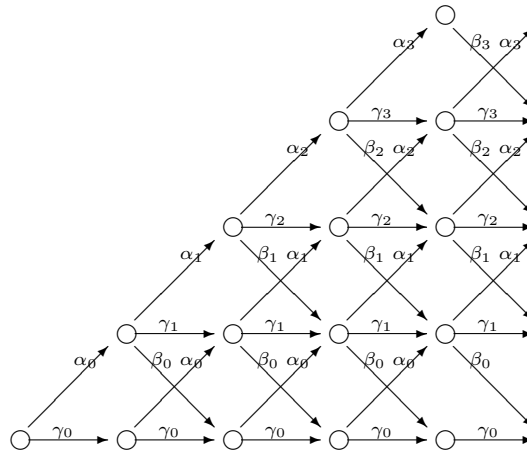


Рис. 13.2: Треугольник Моćкина с кратностями

Конечно, доказательство теоремы обобщается на произвольную расстановку кратностей. Более того, его можно без труда перенести и на треугольник Моćкина (рис. 13.2).

**Теорема 13.4.2.** Пусть через  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  обозначены кратности векторов  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  и  $(1, 0)$  соответственно в  $i$ -м слое взвешенного треугольника Моćкина. Тогда производящая функция  $F_k(s)$  для путей с началом и концом на высоте  $k$ , не опускающихся ниже этой высоты, представляется в виде непрерывной дроби

$$F_k(s) = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}{1 - \gamma_k s - \frac{\alpha_k \beta_k s^2}{1 - \gamma_{k+1} s - \frac{\alpha_{k+1} \beta_{k+1} s^2}{1 - \dots}}}$$

**Доказательство.** Конечно, эта теорема доказывается так же, как и ее частный случай теорема 13.4.1. Мы, однако, хотим изложить то же самое доказательство на языке формальных грамматик. Сопоставим векторам  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 0)$  в  $i$ -м слое буквы  $a_i, b_i, c_i$  соответственно. Мы будем рассматривать языки  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots$  в алфавите из бесконечного набора букв

$\{a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \dots\}$ . Язык  $\mathcal{F}_k$  состоит из слов, отвечающих путям с началом и концом на высоте  $k$ , не опускающимся ниже этой высоты.

Грамматика

$$\begin{aligned} r_0 &\longrightarrow \lambda \\ r_0 &\longrightarrow c_0 r_0 \\ r_0 &\longrightarrow a_0 r_1 b_0 r_0 \\ r_1 &\longrightarrow \lambda \\ r_1 &\longrightarrow c_1 r_1 \\ r_1 &\longrightarrow a_1 r_2 b_1 r_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

является грамматикой с однозначным выводом. Буква  $r_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  порождает язык  $\mathcal{F}_k$ . Поэтому некоммутативные производящие функции для языков  $\mathcal{F}_k$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \lambda + c_0 \mathcal{F}_0 + a_0 \mathcal{F}_1 b_0 \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 &= \lambda + c_1 \mathcal{F}_1 + a_1 \mathcal{F}_2 b_1 \mathcal{F}_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Подставляя  $\lambda = 1$ ,  $a_i = \alpha_i s$ ,  $b_i = \beta_i s$ ,  $c_i = \gamma_i s$ , получаем систему уравнений на коммутативные производящие функции

$$\begin{aligned} F_0(s) &= 1 + \gamma_0 s F_0(s) + \alpha_0 \beta_0 s^2 F_0(s) F_1(s) \\ F_1(s) &= 1 + \gamma_1 s F_1(s) + \alpha_1 \beta_1 s^2 F_1(s) F_2(s) \\ &\dots \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} F_0(s) &= \frac{1}{1 - \gamma_0 s - \alpha_0 \beta_0 s^2 F_1(s)} \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_0 s - \frac{\alpha_0 \beta_0 s^2}{1 - \gamma_1 s - \alpha_1 \beta_1 s^2 F_2(s)}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Вывод формул для остальных  $F_k$  аналогичен, и теорема доказана.  $\square$

## 13.5 Сравнения в последовательностях

Этот раздел посвящен свойствам последовательностей целых чисел, приведенных по различным модулям.

Рассмотрим, например, последовательность чисел Эйлера

$$1, 1, 5, 61, 1385, \dots$$

Остатки от деления элементов этой последовательности на 4 образуют новую последовательность

$$1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

Можно проверить, что и последующие члены этой последовательности также будут единицами.

Та же самая последовательность, взятая по модулю 3, выглядит следующим образом:

$$1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$$

Периодичность последовательности подсказывает нам, что она задается рациональной производящей функцией. Действительно, пусть  $N$  — длина периода последовательности  $a_i$ , т.е.  $a_{k+N} = a_k$  для всех достаточно больших  $k$ . Тем самым, последовательность задается линейным рекуррентным соотношением и, согласно теореме 2.3.1, соответствующая производящая функция рациональна.

В случае чисел Эйлера такую производящую функцию несложно найти. Действительно, рассмотрим представление производящей функции для них в виде непрерывной дроби

$$E(s) = \frac{1}{1 - \frac{1^2 s^2}{1 - \frac{2^2 s^2}{1 - \frac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}$$

При приведении последовательности по модулю 4 второй член этой дроби обращается в нуль, поэтому вся дробь принимает вид

$$E_4(s) \equiv \frac{1}{1 - s^2} \pmod{4}.$$

(Два ряда с целыми коэффициентами сравнимы по какому-либо модулю, если по этому модулю сравнимы соответствующие коэффициенты рядов.) При приведении по модулю 3 обращается в нуль третий член, и дробь выглядит так:

$$E_3(s) \equiv \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - 4s^2}} \pmod{3} \equiv \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \pmod{3}.$$

Вообще, при приведении последовательности чисел Эйлера по модулю  $p$  мы получаем конечную дробь

$$E_p(s) \equiv \frac{1}{1 - \frac{1^2 s^2}{1 - \dots \frac{(p-2)^2 s^2}{1 - (p-1)^2 s^2}}} \pmod{p},$$

так как коэффициент  $p^2$  в следующем числителе сравним с нулем по модулю  $p$  и, тем самым, обращает в нуль весь хвост непрерывной дроби. Ясно, как распространить это рассуждение на произвольную непрерывную дробь.

**Теорема 13.5.1.** Пусть производящая функция  $A(s)$  представлена в виде непрерывной дроби

$$A(s) = \frac{1}{1 - c_1 s - \frac{p_1 s^2}{1 - c_2 s - \frac{p_2 s^2}{1 - c_3 s - \frac{p_3 s^2}{1 - \dots}}}}.$$

Тогда функция  $A_p(s) \equiv A(s) \pmod{p}$  рациональна для любого числа  $p$ , являющегося делителем одного из произведений  $p_1, p_1 p_2, p_1 p_2 p_3, \dots$ . Если  $p$  делит произведение  $p_1 \dots p_k$ , то

$$A_p(s) \equiv \frac{1}{1 - c_1 s - \frac{p_1 s^2}{1 - \dots - \frac{p_{k-2} s^2}{1 - c_{k-1} s - p_{k-1} s^2}}} \pmod{p}.$$

Таким образом, теорема 13.5.1 позволяет найти представление в виде рациональной производящей функции для последовательностей, отвечающих взвешенным треугольникам Дика, которые приведены по некоторым (иногда даже по всем, как в случае чисел Эйлера) модулям.

Другой подход к изучению арифметических свойств элементов числовых последовательностей основан на использовании различных комбинаторных представлений для них. Вот простейший пример подобного рассуждения. Число

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

является целым при любом  $n$ , однако непосредственно из формулы это не очевидно. Мы знаем, впрочем, что это число равно числу правильных скобочных структур из  $n$  пар скобок, и поэтому оно не может не быть целым.

Представление чисел Каталана триангуляциями правильных  $(n+2)$ -угольников позволяет доказать следующее утверждение.

**Утверждение 13.5.2.** Если число  $n+2$  является степенью простого числа,  $n+2 = p^k$  и  $n > 1$ , то число Каталана  $c_n$  делится на  $p$ .

Например,

$$c_2 = 2 \equiv 0 \pmod{2}; \quad c_5 = 42 \equiv 0 \pmod{7}; \quad c_7 = 429 \equiv 0 \pmod{3}.$$

**Доказательство.** Группа  $\mathbb{Z}_{n+2}$  вычетов по модулю  $n+2$  действует на множестве триангуляций правильного  $(n+2)$ -угольника поворотами. При  $n > 1$  у этого действия нет неподвижных точек. Поэтому длина каждой его орбиты делится на  $p$ , а, значит, делится на  $p$  и число триангуляций.

Аналогично, представление чисел Каталана правильными скобочными структурами дает еще одно свойство этих чисел.

**Утверждение 13.5.3.** Если число  $n$  есть степень простого числа,  $n = p^k$ , то  $c_n \equiv 2 \pmod{p}$ .

Например,

$$c_2 = 2 \equiv 2 \pmod{2}; \quad c_3 = 5 \equiv 2 \pmod{3}; \quad c_5 = 42 \equiv 2 \pmod{5}.$$

**Доказательство.** Группа вычетов  $\mathbb{Z}_{2n}$  по модулю  $2n$  действует на множестве правильных скобочных структур из  $n$  пар скобок по следующему правилу. Образующая этой группы представляется циклическим сдвигом на единицу. При таком сдвиге

1. самая левая скобка стирается;
2. вместо нее в структуру добавляется самая правая скобка;
3. правая скобка, парная стертой самой левой скобке, заменяется на левую скобку.

Все остальные скобки не меняются. При  $n > 1$  у этого действия нет неподвижных точек.

Ровно одна орбита такого действия имеет длину 2. Она состоит из скобочных структур

$$\underbrace{()() \dots ()}_{n \text{ пар скобок}} \quad \text{и} \quad ( \underbrace{() \dots ()}_{n-1 \text{ пар скобок}} ).$$

Длины остальных орбит делятся на  $p$ , что и доказывает утверждение.

## 13.6 Задачи

*Задача 13.1.* Докажите, что грамматика из примера 13.2.5 действительно описывает язык  $\mathcal{F}$  из примера 12.1.2 и что вывод в ней однозначен. Воспользовавшись этой грамматикой, найдите производящую функцию для языка  $\mathcal{F}$ .

*Задача 13.2.* Придумайте для языка  $\mathcal{F}$  порождающую грамматику с одним порождающим символом и однозначным выводом.

*Задача 13.3.* Напишите правила вывода для языка правильных скобочных структур из двух пар скобок (круглых и квадратных) и выведите производящую функцию для него. Этот язык называется *языком Дика второго порядка*. Обобщите результат на языки Дика произвольного порядка.

*Задача 13.4.* Задайте с помощью формальных грамматик языки систем путей из задач 3.5, 3.11; выведите отсюда соответствующие производящие функции.

*Задача 13.5.* *Языком Моцкина* называется язык в алфавите  $\{a, b, c\}$ , состоящий из таких слов, что зачеркивание всех букв  $c$  в них дает слово из языка Дика. Слова в языке Моцкина находятся во взаимно однозначном соответствии с путями Моцкина из задачи 3.3. Постройте для языка Моцкина грамматику с однозначным выводом и найдите с ее помощью производящую функцию для этого языка.

*Задача 13.6.* Постройте грамматику для языка натуральных чисел, записанных в двоичной системе счисления.

*Задача 13.7.* Постройте грамматику для языка правильных арифметических выражений в двоичной системе счисления в алфавите  $\{(\cdot), +, 1, 0\}$ .

*Задача 13.8.* Постройте грамматики для языков а)  $\mathcal{L}_1 = \{a^i b^j \mid i \geq 0\}$ ; б)  $\mathcal{L}_2 = \{a^i b^j \mid i \geq j \geq 0\}$ ; в)  $\mathcal{L}_3 = \{w \mid \text{число вхождений буквы } a \text{ в слово } w \text{ равно числу вхождений буквы } b \text{ в это слово}\}$ ; г)  $\mathcal{L}_4 = \{w \mid \text{число вхождений буквы } a \text{ в слово } w \text{ вдвое больше числа вхождений буквы } b\}$ ; д)  $\mathcal{L}_5 =$  множество палиндромов в алфавите из трех букв. (*Палиндромом* называется слово, одинаково читающееся слева направо и справа налево.)

Найдите производящие функции для этих языков.

*Задача 13.9.* Найдите производящие функции для языков из двух букв, слова которых не содержат

а) подслова  $ba$ ; б) подслова  $aabb$ ; в) подслова  $aba$ ;

г) подслов  $aabab, ababa$ .

*Задача 13.10.* Обозначим через  $a_{n,k}$  число путей в треугольнике Дика, состоящих из  $n$  звеньев, площадь под которыми равна  $k$ ;  $a_{2,1} = 1$ ,  $a_{2,k} = 0$  при  $k$  четном. Докажите, что

$$A(s, t) = \sum a_{n,k} s^n t^k = \frac{1}{1 - \frac{s^2 t}{1 - \frac{s^2 t^3}{1 - \frac{s^2 t^5}{1 - \dots}}}}.$$

**Задача 13.11.** Докажите справедливость следующих разложений в непрерывные дроби:

• а)

$$B(s) = \frac{s}{1 - \frac{1 \cdot 2s^2}{1 - \frac{2 \cdot 3s^2}{1 - \dots - \frac{k(k+1)s^2}{1 - \dots}}}},$$

где  $B(s)$  — производящая функция для стороны Бернулли треугольника Бернулли–Эйлера;

• б)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)!! s^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{2s^2}{1 - \frac{3s^2}{1 - \dots}}}},$$

где  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ ;

• в)

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n s^n = \frac{1}{1 - s - \frac{s^2}{1 - s - \frac{2s^2}{1 - s - \frac{3s^2}{1 - \dots}}}},$$

где  $I_n$  — число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из  $n$  элементов,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 4$ ,  $I_4 = 10$ , ...;

• г)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! s^n = \frac{1}{1 - 2s - \frac{1 \cdot 2s^2}{1 - 4s - \frac{2 \cdot 3s^2}{1 - 6s - \frac{3 \cdot 4s^2}{1 - \dots}}}};$$

• д)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! s^n = \frac{1}{1 - s - \frac{1^2 s^2}{1 - 3s - \frac{2^2 s^2}{1 - 5s - \frac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}.$$

**Задача 13.12.** Напишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка в алфавите  $0, 1$ , состоящего из слов с четным числом нулей, и найдите производящую функцию для этого языка.

**Задача 13.13.** Напишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка в алфавите  $0, 1, 2$ , состоящего из слов с четным числом нулей и четным числом единиц, и найдите производящую функцию для этого языка.

**Задача 13.14.** Найдите длины периодов следующих последовательностей: а) чисел Эйлера  $\text{mod } 6$ ; б) чисел Эйлера  $\text{mod } 7$ ; в) чисел Бернулли  $\text{mod } 6$ ; г) чисел Бернулли  $\text{mod } 7$ ; д) числа инволюций  $I_n \text{ mod } 6$ ; е) числа инволюций  $I_n \text{ mod } 7$ .

## Глава 14

# Библиографические замечания

Представленный в настоящем приложении список литературы ни в коем случае не претендует на полноту. Он лишь призван несколько расширить перспективу и позволить читателям взглянуть на дискретную математику с других точек зрения.

Дискретная математика — один из стандартных курсов, который читается как на математических факультетах классических университетов, так и в технических вузах ([1, 4, 5, 11]). Отдельно хотелось бы отметить обстоятельный курс [6], подходы которого близки к излагаемым в настоящей книге.

На русском языке имеется несколько монографий, в которых изложение метода производящих функций занимает одно из центральных мест. В первую очередь следует отметить две книги [7] и [12] под одинаковым названием “Перечислительная комбинаторика”. Помимо богатого материала (который частично перекрывается с изложенным в настоящей книге и в значительной степени дополняет его) там приведено большое количество исторических сведений и обширная библиография. Этот список следует дополнить еще не переведенными на русский язык книгами [19, 23].

Несмотря на то, что с момента первого издания книги Поля и Сеге [9] прошло уже три четверти века, она по-прежнему остается одной из лучших книг по комбинаторике и, в том числе, по методу производящих функций. В настоящую книгу включено много задач из этого сборника. Частично задачи взяты также из уже упоминавшихся книг [7] и [12], других источников, а также придуманы мной самостоятельно.

Треугольник Бернулли–Эйлера введен и подробно изучен В.И. Арнольдом [15, 2, 3] в связи с исследованием различных функциональных топологических пространств. О производящих функциях для взвешенных треугольников Дика и Моцкина см. статью [21]. Отправной точкой в изложении теневого исчисления послужила статья [22].



Подход к инвариантам графов в настоящей книге следует классической монографии Татта [13]. Перечислительные аспекты теории графов описаны в [14]. Изложения связи перечислительных задач с группой перестановок следует, в основном, [8]. Там же можно найти подробное описание алгебры Хопфа графов и смежных алгебр Хопфа.

Вывод уравнений на производящие функции для языков, порожденных контекстно-свободными грамматиками, следует подходу, изложенному в [16] (см. также ссылки там). Связь этого подхода с уравнением Лагранжа подробно описана в [20].

Все, что связано с представлением производящих функций в виде непрерывных дробей, я взял из работ Флажолле [17, 18].

# Литература

- [1] Джеймс А. Андерсон, *Дискретная математика и комбинаторика*, Москва-Санкт-Петербург-Киев, Вильямс, 2004
- [2] В. И. Арнольд *Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера*, УМН, **47**, 1 (1992), 3–45
- [3] В. И. Арнольд *Сравнения для чисел Эйлера, Бернулли и Спрингера групп Кокстера*, Изв. РАН, сер. матем., **56**, 5 (1992), 1129–1133
- [4] М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин *Дискретная математика: Графы, матроиды, алгоритмы*, РХД, Ижевск, 2001
- [5] А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев *Дискретная математика*, МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004
- [6] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика: Основание информатики*, М., Мир, 1998
- [7] Я. Гульден, Д. Джексон *Перечислительная комбинаторика*, М., Наука, 1990
- [8] С. К. Ландо, А. К. Звонкин, *Графы на поверхностях и их приложения*, М., МЦНМО, 2010
- [9] Г. Поля, Г. Сеге *Задачи и теоремы из анализа*, тт. **1**, **2**, М., Наука, 1978
- [10] Дж. Риордан *Введение в комбинаторный анализ*, М., ИЛ, 1963
- [11] В. Н. Сачков *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, Москва, "Наука" 1982.
- [12] Р. Стэнли *Перечислительная комбинаторика*, М., Мир, 1990
- [13] У.Татт, *Теория графов*, М., Мир, 1988
- [14] Ф. Харари, Э. Палмер *Перечисление графов*, М., Мир, 1976
- [15] V. I. Arnold *Bernoulli–Euler updown numbers of functions singularities, their arithmetics and combinatorics*, Duke Math. J. **63** (1991), 537–555

- [16] M.-P. Delest, G. Viennot *Algebraic languages and polyminoes enumeration*, Theoretical Computer Science, **34** (1984), 169–206  
[Русский перевод: М.-П. Делест, Ж. Вьенно, *Алгебраические языки и перечисление полимино*, Киб. сборник, нов. серия, вып. 26 (1989), М., Мир, 113–156]
- [17] P. Flajolet *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Mathematics **32** (1980), 125–161
- [18] P. Flajolet *On congruences and continued fractions for some classical combinatorial quantities*, Discrete mathematics **41** (1982), 145–153
- [19] P. Flajolet, R. Sedgewick *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009
- [20] S. K. Lando, A. K. Zvonkin *Meanders*, Selecta Mathematica Sovietica **11**, 2 (1992), 117–144
- [21] V. R. Meshkov, A. V. Omelchenko, M. I. Petrov, E. A. Tropp, *Dyck and Motzkin triangles with multiplicities*, Mosc. Math. J. 10 (2010), no. 3, 611Ц628
- [22] S. M. Roman, G.-C. Rota, *The umbral calculus*, Advances in Math. 27 (1978), no. 2, 95Ц188.
- [23] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.