

Задачи по группам и алгебрам Ли – 3

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. а) Покажите, что для любого $x \in \mathfrak{g}$ оператор $\text{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ является дифференцированием алгебры Ли \mathfrak{g} (такие дифференцирования называются *внутренними*). **б)** Докажите, что внутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре Ли $\text{Der}(\mathfrak{g})$ всех дифференцирований алгебры Ли \mathfrak{g} .

2. Найдите факторалгебру алгебры Ли $\text{Der}(\mathfrak{g})$ по идеалу внутренних дифференцирований, если **а)** \mathfrak{g} – 2-мерная неабелева алгебра Ли; **б)** \mathfrak{g} – 3-мерная алгебра Гейзенберга.

3. Для каких трехмерных комплексных алгебр Ли присоединенное представление **а)** неприводимо; **б)** неразложимо в прямую сумму; **в)** точно?

4. Для каждой комплексной трехмерной алгебры Ли укажите какую-нибудь группу с такой алгеброй Ли.

5. Пусть $g \in G$. **а)** Докажите, что *централизатор* $Z(g) := \{h \in G \mid hg = gh\}$ есть подгруппа Ли в G . **б)** Пусть \mathfrak{g} – соответствующая алгебра Ли. Докажите, что

$$\text{Lie } Z(g) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(g)x = x\}.$$

6. Пусть H – связная подгруппа Ли в G . **а)** Докажите, что *нормализатор* $N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ есть подгруппа Ли в G . **б)** Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – соответствующие алгебры Ли. Докажите, что

$$\text{Lie } N(H) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

7. Найдите центр группы Ли обратимых 3×3 -матриц, сохраняющих прямую в \mathbb{C}^3 .

8. Найдите коммутант группы Ли из задачи 7.

9. Пусть $V = \mathbb{C}^2$ – тавтологическое представление группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$. **а)** Докажите, что представление $S^k V$ неприводимо при любом k . **б)** При каких k это представление точно?

10. Опишите все связные группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ с точностью до изоморфизма.

11*. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Докажите, что следующие представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ неприводимы: **а)** $S^k V$; **б)** $\Lambda^k V$.

12*. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ проста, т.е. не имеет нетривиальных идеалов.

13*. Пусть X – нильпотентная $n \times n$ -матрица ранга $n - 1$, т.е. жорданов блок вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите жорданову нормальную форму оператора $\text{ad } X : A \mapsto XA - AX$ в пространстве $n \times n$ -матриц.

14*. **а)** Докажите, что все комплексные неприводимые представления 2-мерной неабелевой алгебры Ли одномерны. **б)** Докажите, что у 2-мерной неабелевой алгебры Ли существуют неразложимые представления любой размерности.

15*. Приведите пример группы Ли, коммутант которой не является подгруппой Ли.