Семинар по спецфункциям. Листок 8

1.* Выведите асимптотическую формулу Стирлинга оценкой контурного интеграла в формуле обращения преобразования Меллина:

$$\log\Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{-\pi}{s\sin\pi s}\zeta(-s)z^s ds, \qquad |\arg z| < \pi.$$

<u>Обозначения</u>

1. Символ Похгаммера $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$, $(a)_0 = 1$.
2. Гипергеометрический ряд $F_{p,q}(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z) = 1 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{n!(b_1)_n\cdots(b_q)_n} z^n$

2. Докажите, что гипергеометрический ряд $F_{q+1,q}(a_1,\dots,a_{q+1};b_1,\dots,b_q;z)$

а) при $\mathrm{Re}(\sum b_i - \sum a_i) > 0$ абсолютно сходится при всех $z, |z| = 1$ (т.е., на всем замыкании круга сходимости)

б*) при $-1 < \mathrm{Re}(\sum b_i - \sum a_i) < 0$ сходится условно при всех $z, |z| = 1, z \neq 1$

в) при $\mathrm{Re}(\sum b_i - \sum a_i) < -1$ расходится для любого $z, |z| = 1$.

3. Пользуясь формулой Гаусса для значения гипергеометрической функции в единице, $F_{2,1}(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$ при $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$, вычислите следующие суммы:

а) $\sum_{s=0}^n \prod_{r=1}^s \dfrac{(a+r)(n-r+1)}{r(d-r)}$

б) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\binom{m}{k}^{-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$;

в) $F_{2,1}(-n,a;c;1) = \dfrac{(c-a)_n}{(c)_n}$.

4. Доопределим биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ на все комплексные значения n по формуле $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ при $k = 1, 2, \dots$ и $\binom{n}{0} = 0$. Докажите формулы Лерха:

а) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{u}{k}}{\binom{v}{k}} = \frac{v+1}{v-u+1}, \qquad \mathrm{Re}(u-v) > 1,$$

б)* $$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{u}{k}}{\binom{v}{k}} = \frac{v+1}{v-u+1}\left(1 - \frac{\binom{u}{m+1}}{\binom{v+1}{m+1}}\right), \qquad \mathrm{Re}(u-v) > 1.$$

5.* Пусть $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, d > 0$, $|z| < 1$. Докажите, что

$$F_{3,2}(a,b,d;c,f;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)}\int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1}F_{2,1}(a,b;f;zt)dt,$$

$$F_{2,1}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)}\int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1}F_{2,1}(a,b;d;zt)dt$$

6.* Докажите следующие формулы преобразования гипергеометрических функций (например, сделав замену переменной интегрирования в эйлеровом интеграле):

а) $$F_{2,1}(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}F_{2,1}\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \qquad \text{(Пфафф)}$$

б) $$F_{2,1}(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}F_{2,1}(c-a, c-b; c; z) \qquad \text{(Эйлер)}$$

7. Сравнив коэффициенты при степенях x в формуле преобразования Эйлера, докажите формулу суммирования Заальтшутца:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(a)_j(b)_j(c-a-b)_{n-j}}{j!(c)_j(n-j)!} = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n},$$

эквивалентную соотношению $F_{3,2}(-n,a,b;c,1+a+b-c-n;1) = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}$.