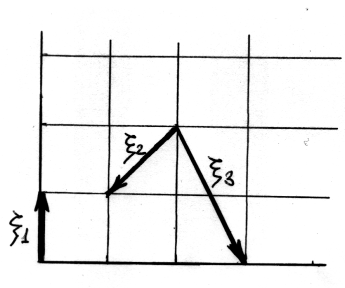
12.1. Для каждой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ выясните, имеет ли функция f в этой точке частные производные и дифференцируема ли она в этой точке. Исследуйте частные производные функции f на непрерывность.
1)$^{\text{O}}$ $f(x,y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$; **2)**$^{\text{O}}$ $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$; **3)** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;
4) $f(x,y) = x^2y^2 \sin\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{y^2}$ при $x \neq 0,\ y \neq 0$; $f(x,0) = f(0,y) = 0$.

12.2$^{\text{O}}$**.** Пусть x, y — координаты на плоскости. Найдите значения дифференциалов dx, $d(xy)$, $d(x^2 + y^2)$ на векторах ξ_1, ξ_2, ξ_3 (см. рис.):



Определение 12.1. Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$ — функция на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ее *производной в точке* $x_0 \in U$ *вдоль вектора* $\xi \in \mathbb{R}^n$ называется производная функции $\varphi(t) = f(x_0 + t\xi)$ при $t = 0$. Она обозначается $\partial_\xi f(x_0)$.

12.3. Как связаны $\partial_\xi f(x_0)$ и $\partial_{c\xi} f(x_0)$, где $c \in \mathbb{R}$ — фиксированная константа?

12.4. Является ли частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ производной вдоль какого-нибудь вектора?

12.5. Придумайте функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющую в точке $x_0 \in \mathbb{R}^2$ производную вдоль любого вектора, но **1)** разрывную в x_0; **2)** непрерывную в x_0, но не дифференцируемую в x_0; **3)** непрерывную в $\mathbb{R}^2$ и дифференцируемую в $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$, но не дифференцируемую в x_0.

12.5$^{\text{O}}$**. 4)** Докажите, что если функция f дифференцируема в x_0, то она имеет производную вдоль любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, и $\partial_\xi f(x_0) = df(x_0)\xi$.

12.6. Вычислите частные производные первого и второго порядков для следующих функций. Попутно убедитесь, что для каждой из них справедливо равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
1)$^{\text{O}}$ $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; **2)** $f(x,y) = x^y$.

12.7. Выразите частные производные функции h через частные производные дифференцируемых функций f и g:
1)$^{\text{O}}$ $h(u,v) = f(u + v, u^2 + v^2)$; **2)** $h(u,v,w) = f(u/v, v/u)g(vw)$; **3)** $h(x,y) = f(x-y)^{g(xy)}$.

Определение 12.2. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. *Оператором Лапласа* в U называется отображение Δ, ставящее в соответствие каждой дважды дифференцируемой функции f на U функцию

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^n)^2},$$

где $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Сокращенно пишут $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$.

12.7$^{\text{O}}$. 4) Пусть $f \in C^2(0,+\infty)$. Определим функцию $u\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ формулой $u(x,y,z) = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Докажите, что $\Delta u = F(r)$ для некоторой функции F, и найдите эту функцию.

12.8. Опишите все функции $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие уравнению $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

В следующей задаче через $M_n(\mathbb{R})$ обозначается пространство вещественных $n \times n$-матриц.

12.9. Найдите дифференциалы следующих функций. По возможности (кроме п. 3c) постарайтесь записать ответы в бескоординатной форме (т.е. так, чтобы в полученных формулах не участвовали координаты точек и векторов).
1) $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x,y)$ (скалярное произведение);
2) $f\colon M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},\ f(A) = \operatorname{tr} A$ (след матрицы A);
3) $f\colon M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},\ f(A) = \det A$ (определитель матрицы A).
В п.3) рассмотрите отдельно случаи:
a) $df(E)X$, где E — единичная матрица;
b) $df(A)X$, где A — невырожденная матрица;
c) $df(A)X$, где A — произвольная матрица.

12.10 (*единственность разложения Тейлора*)**.** Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f \in C^N(U)$ и $x \in U$. Предположим, что $f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha h^\alpha + o(\|h\|^N)$ при $h \to 0$ (по поводу мультииндексных обозначений см. лекцию). Докажите, что $c_\alpha = \dfrac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}$.

12.11$^{\text{O}}$. Найдите $\dfrac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$ для $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

Определение 12.3. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, вместе с каждой точкой x содержащее луч $\{tx : t > 0\}$. Функция $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ называется *однородной степени* λ (где $\lambda \in \mathbb{R}$), если $\varphi(tx) = t^\lambda \varphi(x)$ для всех $x \in U$ и $t > 0$.

Например, любой однородный многочлен степени $k \in \mathbb{N}$ (т.е. линейная комбинация одночленов $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, где $i_1 + \cdots + i_n = k$), является однородной функцией степени k на $\mathbb{R}^n$.

12.12. Пусть множество U таково, как в определении 12.3, и пусть $\varphi \in C^\infty(U)$.
1) Предположим, что φ — однородная функция степени $\lambda \in \mathbb{R}$. Докажите, что для всех $x \in U$ и всех $p \in \mathbb{N}$ справедлива следующая формула (по поводу мультииндексных обозначений см. лекцию):

$$\sum_{|\alpha|=p} \frac{D^\alpha \varphi(x)}{\alpha!} x^\alpha = C_p \varphi(x),$$

где C_p — некоторая константа. Найдите ее. При $p = 1$ полученная формула называется *формулой Эйлера.*
2) Предположим, что φ удовлетворяет формуле Эйлера (см. п.1). Докажите, что φ — однородная функция степени λ.
3) Докажите, что однородная гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ степени $k \in \mathbb{N}$ является однородным многочленом степени k.