Глава 11

Теорема Абеля

Линейные расслоения над данной комплексной кривой находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами линейной эквивалентности дивизоров на этой кривой. У такого класса имеется целочисленная характеристика — его степень. Поскольку дивизоры состоят из точек кривой, естественно ожидать, что множество классов дивизоров одинаковой степени наделено дополнительными структурами. Оно должно быть топологическим пространством, более того — комплексным многообразием. Теорема Абеля отождествляет пространство классов дивизоров нулевой степени на кривой рода g с некоторым g-мерным комплексным тором — якобианом кривой.

В частности, теорема Абеля дает ответ на вопрос, какие дивизоры D представляются в виде $D = (f)$, где f — некоторая мероморфная функция. Такие дивизоры очевидно удовлетворяют условию $\deg D = 0$, поскольку у любой мероморфной функции сумма порядков всех нулей и полюсов равна 0.

Пространство классов дивизоров любой другой степени имеет такой же вид, однако его изоморфизм с якобианом не является каноническим. Помимо описания пространства линейных расслоений геометрия якобиана несет большое количество другой информации о структуре кривой.

11.1 Якобиан

Пусть γ — путь на кривой C. Интеграл по такому пути определяет линейный функционал $\gamma : \Omega^1(C) \to \mathbb{C}$ на пространстве голоморфных 1-форм на C, $\gamma : \omega \mapsto \int_\gamma \omega$. По теореме Стокса этот функционал определяется классом гомотопической эквивалентности пути γ среди всех путей с данным началом и концом. Если путь γ замкнут, то задаваемый им функционал определяется соответствующим элементом группы первых гомологий $[\gamma] \in H_1(C, \mathbb{Z})$ (если два пути представляют один и тот же класс гомологий, то отвечающие им функционалы одинаковы, даже если пути гомотопически неэквивалентны).

Все функционалы, отвечающие замкнутым путям, образуют дискретную подгруппу в g-мерном векторном пространстве $(\Omega^1(C))^\vee$, двойственном пространству голоморфных 1-форм на кривой C рода g. Более того, как мы видели (см. лемму 6.4.2), эта подгруппа является полномерной решеткой — ее ранг равен $2g$. В качестве образующих этой решетки можно взять любой набор функционалов, построенных по некоторому базису в $H_1(C,\mathbb{Z})$. Построенная решетка называется *решеткой периодов* кривой C.

Факторгруппа пространства $(\Omega^1(C))^\vee$ по решетке периодов представляет собой g-мерный комплексный тор. Этот тор называется *якобианом* кривой C и обозначается $J(C)$.

Пример 11.1.1. Якобианы эллиптических кривых одномерны, т.е. сами являются эллиптическими кривыми. Более того, якобиан всякой эллиптической кривой изоморфен ей самой. Действительно, пусть эллиптическая кривая C является результатом факторизации комплексной прямой $\mathbb{C}$ с координатой z по решетке, натянутой на векторы 1 и τ. Выберем в $H_1(C,\mathbb{Z})$ базис, состоящий из параллели и меридиана тора, т.е. из классов кривых, представленных как результат факторизации отрезка $[0,1]$ и отрезка $[0,\tau]$ в $\mathbb{C}$ соответственно.

Первая кривая определяет на $\Omega^1(C)$ линейный функционал, значение которого на базисной голоморфной 1-форме $\omega = dz$ равно

$$\int_0^1 \omega = 1,$$

вторая — функционал, имеющий значение

$$\int_0^\tau \omega = \tau,$$

откуда и следует, что $J(C) = C$.

Уже этот пример показывает, что якобианы различных кривых одного рода, вообще говоря, не биголоморфны друг другу.

Замечание 11.1.2. В отличие от исходной эллиптической кривой на ее якобиане всегда имеется выделенная точка — тождественно равный нулю функционал, т.е. результат проектирования определяющей якобиан решетки. Нулевой функционал задает выделенную точку на якобиане произвольной кривой.

Пусть $q \in C$ — некоторая фиксированная точка, а ω — некоторая голоморфная форма на C. Для каждой точки $p \in C$ определен интеграл $\int_q^p \omega$ вдоль произвольного пути из q в p. При выборе другого пути к этому интегралу добавляется целочисленная линейная комбинация интегралов формы ω по базисным путям, т.е. значение на ω некоторого элемента решетки. Тем самым, каждой паре точек q, p на кривой C однозначно сопоставляется точка $\int_q^p$ якобиана $J(C)$. Поэтому при заданной точке q корректно определено *отображение Абеля–Якоби* $u_q : C \to J(C)$, заданное формулой

$$u_q : p \mapsto \int_q^p,$$

которое продолжается и до отображения пространства дивизоров $u_q\colon \operatorname{Div}(C) \to J(C)$

$$u_q : D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} n_i \int_q^{p_i} .$$

Ясно, что это отображение является гомоморфизмом групп. В частности, для дивизоров нулевой степени $D = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i \in \operatorname{Div}^0(C)$ получаем

$$u(D) = \sum_{i=1}^{k} \int_q^{p_i} - \sum_{i=1}^{k} \int_q^{q_i} = \sum_{i=1}^{k} \int_{q_i}^{p_i}$$

— отображение, которое уже не зависит от выбора начальной точки $q \in C$.

Теорема Абеля утверждает, что дивизор $D \in \operatorname{Div}^0(C)$ можно представить в виде $D = (f)$, где f — мероморфная функция, тогда и только тогда, когда $u(D) = 0$. Верно даже следующее более точное утверждение.

Теорема 11.1.3 (Абель–Якоби)**.** *Пусть $L^*(C)$ — группа по умножению мероморфных функций на C, отличных от тождественно равной нулю функции, а отображение $()$ сопоставляет функции f ее дивизор (f). Тогда последовательность гомоморфизмов*

$$L^*(C) \xrightarrow{()} \operatorname{Div}^0(C) \xrightarrow{u} J(C) \to 0$$

точна, т.е. $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im}()$ *и отображение u сюръективно.*

Теорему Абеля–Якоби можно переформулировать следующим образом. Факторгруппу $\operatorname{Div}^0(C)/\operatorname{Im}() = \operatorname{Pic}(C)$ называют *многообразием Пикара*. Теорема Абеля–Якоби утверждает, что отображение $\operatorname{Pic}(C) \to J(C)$, индуцированное отображением Абеля–Якоби u, является изоморфизмом.

Утверждение о том, что отображение $u\colon \operatorname{Div}^0 \to J(C)$ сюръективно, часто называют *теоремой обращения Якоби*.

11.2 Доказательство необходимости

Докажем, что условие $u(D) = 0$ необходимо для того, чтобы дивизор D представлялся в виде $D = (f)$. Пусть f — мероморфная функция степени d на кривой C. Для $t \in \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ рассмотрим эффективный дивизор $D_t = f^{-1}(t) \in \operatorname{Div}(C)$. Ясно, что $D = (f) = f^{-1}(0) - f^{-1}(\infty) = D_0 - D_\infty$, поэтому, чтобы доказать, что $u(D) = 0$, достаточно доказать, что $u(D_t) = \mathrm{const}$.

Пусть точка $t_0 \in \mathbb{CP}^1$ такова, что над ней у f нет точек ветвления, т.е. ее прообраз $f^{-1}(t_0) = \{p_1(t_0), \ldots, p_d(t_0)\}$ состоит в точности из d точек. Тогда над достаточно малой окрестностью $U(t_0)$ точки t_0 отображение f является (неразветвленным) накрытием, и прообраз $f^{-1}(U(t_0))$ окрестности $U(t_0)$ представляет собой несвязное объединение d биголоморфных ей окрестностей. Обозначим эти окрестности через $U_1, \dots, U_t$, а прообраз точки $t \in U(t_0)$, лежащий в окрестности U_j, через $p_j(t)$, $j = 1, \dots, d$. Положим $D_t = f^{-1}(t) = p_1(t) + \cdots + p_n(t)$. Тогда для любой голоморфной 1-формы ω и выбранной точки q

$$u_q(D_t)(\omega) = \int_q^{p_1(t)} \omega + \cdots + \int_q^{p_n(t)} \omega.$$

Мы хотим доказать, что для некоторой, а значит и для любой, точки q значение $u_q(D_t)(\omega)$ не зависит от t для любой 1-формы ω.

Вычислим производную каждого слагаемого по t в точке t_0. Поскольку ограничение отображения f на каждую окрестность U_j является биголоморфным отображением, t является локальной координатой и в каждой окрестности U_j. Пусть 1-форма ω записывается в этой координате в виде $\varphi(t)dt$, где функция $\varphi(t)$ голоморфна. Тогда

$$\frac{d}{dt}\int_q^{p_j(t)} \omega \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\int_q^{t} \varphi(t)dt \Big|_{t=t_0} = \varphi(t_0).$$

Результат этого вычисления можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\int_q^{p_j(t)} \omega \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Res}_{p_j(t_0)} \frac{\omega}{f - t_0}.$$

Действительно, мы проверили выполнение последнего равенства в локальной координате t в окрестности U_j, а в силу инвариантности его правой части оно выполняется и в любой другой координате. Кроме того, в силу произвольности выбора точки t_0 в окрестности $U(t_0)$, мы заключаем, что для любого t

$$\frac{d}{dt}\int_q^{p_j(t)} \omega = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Res}_{p_j(t)} \frac{\omega}{f - t}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_q(D_t)(\omega) &= \frac{d}{dt}\int_q^{p_1(t)} \omega + \cdots + \frac{d}{dt}\int_q^{p_n(t)} \omega \\ &= \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Res}_{p_1(t)} \frac{\omega}{f-t} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Res}_{p_n(t)} \frac{\omega}{f-t} = 0, \end{aligned}$$

поскольку сумма вычетов мероморфной 1-формы $\frac{\omega}{f-t}$ на компактной кривой равна нулю. □

11.3 Начало доказательства достаточности

Мы начинаем доказывать, что условие $u(D) = 0$ достаточно для того, чтобы дивизор D представлялся в виде $D = (f)$. Пусть для дивизора $D \in \operatorname{Div}^0(C)$

выполняется равенство $u(D) = 0$. Требуется найти мероморфную функцию f, для которой $D = (f)$. Сделаем некоторые предварительные замечания.

Пусть $f : C \to \mathbb{CP}^1$ — мероморфная функция. Рассмотрим мероморфную 1-форму $\alpha_f = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}$ на C. Эта 1-форма обладает следующими свойствами:

1. ее дивизор полюсов $(\alpha_f)_\infty$ состоит из нулей и полюсов функции f, причем все полюса 1-формы простые;
2. $\operatorname{Res}_{p_j} \alpha_f = \frac{n_j}{2\pi i}$, где n_j — ненулевое целое число, причем $\sum_j n_j = 0$;
3. Интеграл от 1-формы α_f по любому замкнутому пути на C — целое число.

Теорема 11.3.1. *Пусть мероморфная 1-форма α обладает перечисленными выше свойствами. Фиксируем точку $q \in C$ и положим*

$$f_q(p) = \exp\left(2\pi i \int_q^p \alpha\right),$$

где интеграл берется по любому пути из q в p, не проходящему через полюсы 1-формы α. Тогда f_q — мероморфная функция на кривой C, для которой $(f_q) = \sum_{j=1}^k n_j p_j = D$.

Заметим, что если 1-форма α обладает свойством 3, то она обладает и свойством 2: вычет 1-формы в полюсе пропорционален ее интегралу по маленькому замкнутому пути с центром в этом полюсе.

Доказательство. Проверим, что $f_q(p)$ не зависит от выбора пути из q в p. Пусть I и I' — два интеграла $\int_q^p \alpha$ по двум разным путям из q в p. Свойство 3 гарантирует, что число $I - I'$ целое, поэтому $\exp(2\pi i I) = \exp(2\pi i I')$, а значит функция $f_q(p)$ мероморфна. Совпадение вычетов 1-форм α и α_{f_q} в полюсах вытекает непосредственно из определения функции f_q. □

11.4 Абелевы дифференциалы первого, второго и третьего рода

Мероморфные (в том числе и голоморфные) дифференциальные 1-формы на кривой C называют также *абелевыми дифференциалами*. При этом голоморфную 1-форму называют абелевым дифференциалом *первого рода*; мероморфную 1-форму, у которой все вычеты равны нулю, называют абелевым дифференциалом *второго рода* (абелев дифференциал первого рода тоже считается абелевым дифференциалом второго рода), а произвольную мероморфную 1-форму называют абелевым дифференциалом *третьего рода*.

Назовем *элементарным дифференциалом третьего рода* мероморфную 1-форму α, у которой есть два полюса p и q, причем эти полюса простые и $\operatorname{Res}_p \alpha = \frac{1}{2\pi i}$, $\operatorname{Res}_q \alpha = -\frac{1}{2\pi i}$.

Теорема 11.4.1. *Для любых двух различных точек p и q кривой C существует элементарный дифференциал третьего рода α, для которого $(\alpha)_\infty = p + q$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что существует мероморфная 1-форма α, для которой $(\alpha)_\infty = p + q$. Действительно, тогда p — простой полюс 1-формы α, поэтому $\operatorname{Res}_p \alpha \neq 0$. Кроме того, по теореме о вычетах $\operatorname{Res}_p \alpha + \operatorname{Res}_q \alpha = 0$. Поэтому после умножения 1-формы α на подходящее число, получаем требуемую 1-форму.

Для дивизора $D = -(p + q)$, где p и q — различные точки кривой C рода g, степень которого равна -2, теорема Римана–Роха дает

$$l(D) - i(D) = -2 + 1 - g.$$

Учитывая, что $l(D) = 0$ (поскольку не бывает голоморфных функций, имеющих нули), заключаем, что $i(D) = g + 1$. Это означает, что пространство мероморфных 1-форм, имеющих полюса не выше первого порядка в точках p и q и не имеющих других полюсов, имеет размерность $g + 1$ — бо́льшую, чем размерность пространства голоморфных 1-форм. В частности, существует 1-форма с полюсами в точности первого порядка в каждой из точек p и q. □

Пример 11.4.2. В случае $g = 0$ такую 1-форму легко написать. Так, если точки p и q имеют координаты 0 и ∞ соответственно, то требуемая 1-форма имеет вид dz/z. Для переноса полюсов в другую пару точек необходимо применить соответствующее дробно-линейное преобразование.

Упражнение 11.4.3. Для заданной пары точек на эллиптической кривой выразите мероморфную 1-форму, имеющую полюса первого порядка в этих точках, через голоморфную 1-форму и функцию Вейерштрасса кривой.

Мы постепенно приближаемся к завершению доказательства достаточности. Пусть $D = \sum_{j=1}^k p_j - \sum_{j=1}^k q_j \in \operatorname{Div}^0(C)$, где точки p_j (а также q_j) не обязательно различны. Построим 1-формы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ так, что $(\alpha_j)_\infty = p_j + q_j$, $\operatorname{Res}_{p_j} \alpha_j = \frac{1}{2\pi i}$ и $\operatorname{Res}_{q_j} \alpha_j = -\frac{1}{2\pi i}$. Положим $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. Тогда α — дифференциал третьего рода, обладающий двумя первыми требуемыми свойствами. Для любой голоморфной 1-формы ω дифференциал $\alpha + \omega$ тоже обладает двумя первыми свойствами. Попробуем подобрать ω так, чтобы он обладал и третьим свойством.

11.5 Билинейные соотношения Римана

Пусть C — риманова поверхность рода g. Выберем на ней замкнутые кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$, классы гомологий которых порождают группу гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$, с индексами пересечений:

$$(\gamma_j, \gamma_{j+g}) = -(\gamma_{j+g}, \gamma_j) = 1, \text{ для } j = 1, \ldots, g.$$

Для голоморфной 1-формы ω рассмотрим периоды $\pi_j(\omega) = \int_{\gamma_j} \omega$, $j = 1, \ldots, 2g$.

Теорема 11.5.1 (билинейные соотношения Римана)**.** *Для любых голоморфных 1-форм ω и α, отличных от нуля, выполняются соотношения*

$$\sum_{j=1}^{g}(\pi_j(\omega)\pi_{j+g}(\alpha)-\pi_{j+g}(\omega)\pi_j(\alpha))=0,$$
$$i\sum_{j=1}^{g}(\pi_j(\omega)\overline{\pi_{j+g}(\alpha)}-\pi_{j+g}(\omega)\overline{\pi_j(\alpha)})>0.$$

Доказательство. Риманову поверхность, соответствующую кривой C, можно склеить из $4g$-угольника P, стороны которого при склейке переходят в кривые $\gamma_1,\dots,\gamma_{2g}$. Каждая из кривых склеена из двух сторон многоугольника P. Ту из них, ориентация которой вдоль границы многоугольника совпадает с ориентацией пути γ_j, мы обозначим через c_j, а вторую сторону — с противоположной ориентацией — через c_j^{-1}. Фиксируем в многоугольнике точку q. Формула $v_q(p)=\int_q^p\omega$ задает однозначную функцию на многоугольнике P, поскольку он односвязен.

По формуле Стокса $\int_{\partial P}v_q\alpha=\iint_P d(v_q\alpha)=0$. Вычислим теперь интеграл $\int_{\partial P}v_q\alpha$ другим способом. Разобьем стороны многоугольника P на четверки, отвечающие парам кривых γ_j и γ_{j+g} для $j=1,\dots,g$:

$$\int_{\partial P}v_q\alpha=\sum_{j=1}^{g}\left(\int_{c_j}v_q\alpha+\int_{c_{g+j}}v_q\alpha+\int_{c_j^{-1}}v_q\alpha+\int_{c_{g+j}^{-1}}v_q\alpha\right).$$

Далее,

$$\int_{c_j}v_q\alpha+\int_{c_j^{-1}}v_q\alpha=\int_{\gamma_j}((v_q(p)-v_q(p'))\alpha,$$

где p,p' — точки, в которые переходят концы сторон c_j и c_j^{-1} при склейке. При этом

$$v_q(p)-v_q(p')=\int_{p'}^{p}\omega=\int_{p'}^{q}\omega-\int_{\gamma_{g+j}}\omega+\int_{p}^{q}\omega=-\int_{\gamma_{g+j}}\omega=-\pi_{g+j}(\omega).$$

Таким образом,

$$\int_{c_j}v_q\alpha+\int_{c_j^{-1}}v_q\alpha=-\pi_{g+j}(\omega)\int_{\gamma_j}\alpha=-\pi_{g+j}(\omega)\pi_j(\alpha).$$

Аналогично

$$\int_{c_{j+1}}v_q\alpha+\int_{c_{j+1}^{-1}}v_q\alpha=\pi_j(\omega)\pi_{g+j}(\alpha),$$

и мы получаем требуемое равенство.

Чтобы доказать требуемое неравенство, нужно рассмотреть дифференциальную форму $iv_q\bar\omega$. Форма ω голоморфна, поэтому $d\bar\omega=0$. Следовательно, $d(iv_q\bar\omega)=i\omega\wedge\bar\omega$ и

$$i\int_{\partial P}v_q\bar\omega=i\iint_P d(v_q\bar\omega)=i\iint_P\omega\wedge\bar\omega>0.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны. □

Замечание 11.5.2. Билинейные соотношения Римана можно переписать следующим образом. Пусть I_g — единичная матрица порядка g, $Q = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$, а Π — матрица периодов. Тогда $\Pi Q \Pi^T = 0$ и матрица $i\Pi Q \overline{\Pi}^T$ эрмитова положительно определенная.

Мы доказали билинейные соотношения Римана для некоторого выделенного базиса $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ 1-мерных гомологий. Докажем их для произвольного ***канонического*** базиса $\gamma_1', \dots, \gamma_{2g}'$, т.е. такого базиса, что индекс пересечения кривых γ_i и γ_{i+g} равен 1 для $i = 1, \dots, g$, а остальные пары кривых имеют нулевой индекс пересечения. Пусть Γ — столбец элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$, а Γ' — столбец элементов $\gamma_1', \dots, \gamma_{2g}'$. Тогда $\Gamma' = A\Gamma$ для некоторой квадратной матрицы A с целочисленными элементами. Каноничность базисов означает, что $\Gamma\Gamma^T = Q$ и $\Gamma'(\Gamma')^T = Q$, следовательно, $S\Gamma\Gamma^T S^T = Q$ и $SQS^T = Q$. Матрицу S, удовлетворяющую соотношению $SQS^T = Q$, называют ***симплектической***. Легко проверить, что матрица, транспонированная к симплектической, сама является симплектической.

Если Π — матрица периодов для базиса $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$, а Π' — матрица периодов для базиса $\gamma_1', \dots, \gamma_{2g}'$, то $\Pi' = \Pi S^T$. Поэтому

$$\Pi' Q (\Pi')^T = \Pi S^T Q S \Pi^T = \Pi Q \Pi^T = 0$$

и

$$i\Pi' Q \overline{\Pi'}^T = i\Pi S^T Q \overline{S}\,\overline{\Pi}^T = i\Pi S^T Q S \overline{\Pi}^T = i\Pi Q \overline{\Pi}^T.$$

Матрицу периодов Π можно упростить, выбрав подходящий базис в пространстве голоморфных форм $\Omega^1(C)$. Запишем матрицу периодов в виде $\Pi = (A, B)$, где A и B квадратные $g \times g$-матрицы. В терминах этих матриц билинейные соотношения Римана означают следующее: 1) $AB^T = BA^T$; 2) матрица $i(A\bar{B}^T - B\bar{A}^T)$ положительно определенная. Из второго свойства, в частности, следует, что матрица A невырожденная. Поэтому можно воспользоваться матрицей $(A^T)^{-1}$, чтобы преобразовать базис пространства $\Omega^1(C)$. После этого преобразования матрица периодов примет вид $\Pi' = (I_g, Z)$, где I_g — единичная $g \times g$-матрица. Матрицу Z называют ***нормализованной матрицей периодов***. Для нормализованной матрицы периодов билинейные соотношения Римана означают следующее: 1) $Z = Z^T$; 2) вещественная матрица $\operatorname{Im} Z$, состоящая из мнимых частей матрицы Z, положительно определена.

11.6 Завершение доказательства достаточности

Пусть $D = \sum_{j=1}^k p_j - \sum_{j=1}^k q_j \in \operatorname{Div}^0(C)$, причем точки p_j (и q_j) здесь могут повторяться. Построим элементарные дифференциалы третьего рода α_1, $\dots, \alpha_k$ так, что α_j имеет простые полюса в точках p_j и q_j, причем $\operatorname{Res}_{p_j} \alpha_j = \frac{1}{2\pi i}$ и $\operatorname{Res}_{q_j} \alpha_j = -\frac{1}{2\pi i}$. Положим $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Выберем кривые $\gamma_1, \dots,$

γ_{2g}, представляющие базис одномерных гомологий римановой поверхности C; можно считать, что ни одна из этих кривых не проходит через полюсы 1-форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Выберем базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ голоморфных 1-форм так, чтобы матрица периодов имела вид $(I_g\, Z)$. Пусть

$$\alpha' = \alpha - \sum_{s=1}^{g} \left(\int_{\gamma_s} \alpha \right) \omega_s.$$

Полюса и вычеты у 1-формы α' такие же, как у 1-формы α. Кроме того, для $j = 1, \ldots, g$ получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_j} \alpha' &= \int_{\gamma_j} \alpha - \sum_{s=1}^{g} \left(\int_{\gamma_s} \alpha \right) \int_{\gamma_j} \omega_s = \\
&= \int_{\gamma_j} \alpha - \sum_{s=1}^{g} \left(\int_{\gamma_s} \alpha \right) \pi_j(\omega_s) = \\
&= \int_{\gamma_j} \alpha - \int_{\gamma_j} \alpha = 0
\end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\pi_j(\omega_s) = \delta_{js}$).

Будем считать, что риманова поверхность C стандартным образом склеена из многоугольника P. Фиксируем точку $b \in P$ и для данной голоморфной 1-формы ω положим $v_b(p) = \int_b^p \omega$. Так мы определим голоморфную функцию на многоугольнике. Мероморфный дифференциал $v_b\alpha'$ имеет те же полюса, что и α. По теореме о вычетах

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} (\mathrm{Res}_{p_j}(v_b\alpha') - \mathrm{Res}_{q_j}(v_b\alpha')) = \int_{\partial P} v_b\alpha'.$$

Ясно, что

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} (\mathrm{Res}_{p_j}(v_b\alpha') - \mathrm{Res}_{q_j}(v_b\alpha')) = \sum_{j=1}^{k} (v_b(p_j) - v(q_j)) = \sum_{j=1}^{k} \int_{q_j}^{p_j} \omega.$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 11.5.1, получаем

$$\int_{\partial P} v_b\alpha' = \sum_{j=1}^{g} (\pi_j(\omega)\pi_{g+j}(\alpha') - \pi_{g+j}(\omega)\pi_j(\alpha')) = \sum_{j=1}^{g} \pi_j(\omega)\pi_{g+j}(\alpha'),$$

поскольку $\pi_j(\alpha') = 0$. Если мы положим $\omega = \omega_s$ для $s = 1, \ldots, g$, то получим

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{q_j}^{p_j} \omega = \sum_{j=1}^{g} \pi_j(\omega_s)\pi_{g+j}(\alpha') = \pi_{g+s}(\alpha'),$$

поскольку $\pi_j(\omega_s) = \delta_{js}$.

Пока мы не пользовались тем, что $D \in \mathrm{Ker}(u\colon \mathrm{Div}^0(C) \to J(C))$. Будем теперь предполагать, что дивизор D обладает этим свойством. Это означает, что сумма интегралов по отрезкам $[q_j, p_j]$ является элементом решетки периодов, т.е. целочисленной линейной комбинацией интегралов по базисным циклам:

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{q_j}^{p_j} = \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l} = \sum_{l=1}^{g} \left(m_l \int_{\gamma_l} + m_{g+l} \int_{\gamma_{g+l}} \right),$$

где числа m_l целые. В частности, для всякой базисной 1-формы ω_s имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{q_j}^{p_j} \omega_s = m_s + \sum_{l=1}^{g} m_{g+l} \int_{\gamma_{g+l}} \omega_s.$$

Свойство $Z = Z^T$ означает, что $\int_{\gamma_{g+l}} \omega_s = \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{q_j}^{p_j} \omega_s = m_s + \sum_{l=1}^{g} m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l.$$

Таким образом,

$$\pi_{g+s}(\alpha') = m_s + \sum_{l=1}^{g} m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l.$$

Покажем, что 1-форма

$$\alpha'' = \alpha' - \sum_{l=1}^{g} m_{g+l} \omega_l$$

обладает всеми требуемыми свойствами. Действительно, поскольку $\pi_s(\omega_l) = \delta_{ls}$ и $\int_{\gamma_s} \alpha' = 0$, мы получаем

$$\int_{\gamma_s} \alpha'' = \int_{\gamma_s} \alpha' - \sum_{l=1}^{g} m_{g+l} \int_{\gamma_s} \omega_l = -m_{g+s} \in \mathbb{Z}.$$

А поскольку

$$\pi_{g+s}(\alpha') = m_s + \sum_{l=1}^{g} m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l,$$

мы получаем

$$\int_{\gamma_{g+s}} \alpha'' = \pi_{g+s}(\alpha') - \sum_{l=1}^{g} m_{g+l} \int_{\gamma_{g+s}} \omega_l = m_s \in \mathbb{Z}.$$

□

11.7 Доказательство теоремы обращения Якоби

Мы докажем несколько более общее утверждение. Предварительно сделаем некоторые замечания.

Пусть C — гладкая кривая. *Симметрической степенью* кривой C называют множество эффективных дивизоров $D = p_1 + \dots + p_d$ степени d (среди точек $p_1, \dots, p_d$ могут быть совпадающие). Симметрическую степень обозначают $C^{(d)}$. Симметрическая степень — это то же самое, что множество неупорядоченных наборов $\{p_1, \dots, p_d\}$.

Теорема 11.7.1. *Симметрическая степень $C^{(d)}$ имеет структуру комплексного многообразия размерности d.*

Доказательство. Рассмотрим прямое произведение $C^d = C \times \dots \times C$; ясно, что оно имеет структуру комплексного многообразия. Топологическое пространство $C^{(d)}$ является фактором пространства C^d по действию группы перестановок S_d, заданному формулой

$$\sigma(p_1, \dots, p_d) = (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(d)}).$$

Следовательно, пространство $C^{(d)}$ компактно и хаусдорфово.

Введем на $C^{(d)}$ локальные координаты. Пусть $D = k_1 p_1 + \dots + k_l p_l$ — эффективный дивизор степени d; здесь точки $p_1, \dots, p_l$ попарно различны. Выберем в окрестности точки p_j локальную координату z_j. Тогда набор

$$(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{k_1 1}, \dots, \sigma_{1l}, \dots, \sigma_{k_l l}),$$

где $\sigma_{rj}(z_j^{(1)}, \dots, z_j^{(k_j)})$ — r-я элементарная симметрическая функция от k_j переменных $z_j^{(1)}, \dots, z_j^{(k_j)}$ в окрестности точки $(p_1, \dots, p_1)$, определяет локальные голоморфные координаты в окрестности точки $D \in C^{(d)}$. Достаточно проверить, что отображение $(z_1, \dots, z_k) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, где $\sigma_j = \sigma_j(z_1, \dots, z_k)$, задает локальные координаты в окрестности нуля в $\mathbb{C}^{(k)}$. В действительности это отображение задает гомеоморфизм $\mathbb{C}^{(k)} \to \mathbb{C}^k$. Взаимная однозначность этого отображения следует из того, что его можно рассматривать как сопоставление набору корней многочлена набор его коэффициентов. Для доказательства непрерывности обратного отображения удобно продолжить отображение $\mathbb{C}^{(k)} \to \mathbb{C}^k$ до отображения $(\mathbb{CP}^1)^{(k)} \to \mathbb{CP}^k$. Это отображение, очевидно, непрерывно и является взаимно однозначным отображением компактного пространства на хаусдорфово, а такое отображение всегда является гомеоморфизмом. □

Пусть $D \in \mathrm{Div}(C)$ и $\deg D = d$. Рассмотрим снова пространство $L(D)$, состоящее из мероморфных функций f, для которых $(f) + D \geq 0$. Размерность этого пространства равна $l(D)$. Каждой функции $f \in L(D)$ можно сопоставить эффективный дивизор $E = (f) + D$ степени d, который является точкой многообразия $C^{(d)}$. Функциям f и λf, где $\lambda \neq 0$ — число, сопоставляется один и тот же дивизор, поэтому мы получаем отображение

$$\alpha\colon \mathbb{CP}^{l(d)-1} \to C^{(d)}, \quad [f] \mapsto E = (f) + D,$$

где $[f]$ — класс эквивалентности функции $f \in L(D) = \mathbb{C}^{l(d)}$ в проективном пространстве.

Проверим, что это отображение α мономорфно. Пусть $\alpha[f] = \alpha[g]$. Тогда $(f) = (g)$, поэтому $(f/g) = 0$. Следовательно, f/g — ненулевая константа, т.е. $[f] = [g]$. Таким образом, проективизацию пространства $L(D)$ можно рассматривать как подмножество в $C^{(d)}$. В действительности это подмножество является подмногообразием. Чтобы убедиться в этом, докажем, что отображение α голоморфно. Пусть $D = \sum_{j=1}^{k} m_j p_j$, где все точки p_j попарно различны. Пусть $l(d) = n + 1$; фиксируем базис $f_0, f_1, \ldots, f_n$ пространства $L(D)$. Любую функцию из $L(D)$ можно представить в виде $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j = f_\lambda$. Набор $(\lambda_0 : \cdots : \lambda_n)$ является однородными координатами точки $[f_\lambda]$ в проективизации пространства $L(D)$. Отображение α задается формулой $\lambda \mapsto E_\lambda = (f_\lambda) + D$. Фиксируем точку $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_0 : \cdots : \tilde{\lambda}_n)$ и проверим, что отображение α голоморфно вблизи нее.

Пусть в дивизор $(f_{\tilde{\lambda}})$ помимо точек $p_1, \ldots, p_k$ входят точки $p_{k+1}, \ldots, p_{k+l}$. Выберем окрестности точек $p_1, \ldots, p_{k+l}$ так, чтобы они попарно не пересекались. Пусть W — объединение этих окрестностей. Построим мероморфную функцию g на W так, чтобы она была тождественно равна 1 в окрестностях точек $p_{k+1}, \ldots, p_{k+l}$ и дивизор (g) совпадал с D в окрестностях точек $p_1, \ldots, p_k$. Тогда для λ вблизи $\tilde{\lambda}$ выполняется равенство $E_\lambda = (f_\lambda g)$.

Можно считать, что $\tilde{\lambda}_0 \neq 0$. Тогда для точек вблизи $\tilde{\lambda}$ мы получаем $(\lambda_0 : \lambda_1 : \cdots : \lambda_n) = (1 : \mu_1 : \cdots : \mu_n)$, где $\mu_j = \lambda_j/\lambda_0$. Положим $f_{(\mu)} = f_0 + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_n f_n$. Произведение $f_{(\mu)} g$ можно рассматривать как функцию от μ и от точки из W. Вблизи $\tilde{\mu} = \left(\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_0} : \cdots : \frac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_0}\right)$ и точек $p_1, \ldots, p_{k+l}$ функция $f_{(\mu)} g$ голоморфна, поскольку в рассматриваемой области $E_\lambda \geq 0$. Голоморфность отображения α следует теперь из приведенной ниже леммы.

Лемма 11.7.2. *Пусть $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ и $z \in \mathbb{C}$. Предположим, что функция $h(\mu, z)$ голоморфна в точке $(0, 0)$ и функция $h(0, z)$ имеет нуль порядка k в точке $z = 0$. Тогда можно выбрать $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялись следующие свойства:*

1) для любого $\mu_0 \in U_\rho = \{\mu \in \mathbb{C}^n \mid |\mu_j| < \rho, j = 1, \ldots, n\}$ функция $h(\mu_0, z)$ имеет ровно k корней $z_1(\mu_0), \ldots, z_n(\mu_0)$ в области $|z| < \varepsilon$;

2) на множестве U_ρ все k элементарных симметрических функций от $z_1(\mu), \ldots, z_n(\mu)$ являются голоморфными функциями от μ.

Доказательство. Функция $h(0, z)$ имеет в точке $z = 0$ изолированный нуль, поэтому можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $|z| = \varepsilon$ для некоторого $\delta > 0$ выполнялось равенство $|h(0, z)| \geq \delta$. Затем можно выбрать $\rho > 0$ так, чтобы при $|z| = \varepsilon$ и $\mu \in U_\rho$ выполнялось неравенство $|h(\mu, z)| \geq \delta/2$.

Если $f(z) = c_0(z-a)^r + c_1(z-a)^{r+1} + \dots$, где $c_0 \neq 0$, то $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{r}{z-a} + \dots$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z^m \frac{f'(z)}{f(z)} = r$$

для любого положительно ориентированного контура C, содержащего точку a и не содержащего других нулей или полюсов функции f. Таким образом, для голоморфной функции f интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}$$

равен числу ее нулей внутри контура C. Легко также видеть, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z^m \frac{f'(z)}{f(z)}$$

равен $z_1^m + \dots + z_k^m$, где $z_1, \dots, z_k$ — нули функции f, расположенные внутри контура C.

Пусть

$$s_m(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} z^m \frac{\partial h(\mu, z)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{h(\mu, z)},$$

где $m = 0, 1, \dots, k$. Функция s_m голоморфна на U_ρ. Функция $s_0(\mu)$ равна числу нулей функции $h(\mu, z)$ в круге $|z| < \varepsilon$ при фиксированном μ. Она непрерывна на U_ρ и принимает только целые значения, поэтому $\sigma_0(\mu) = k$ для всех $\mu \in U_\rho$. Первое утверждение леммы доказано. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно выразить элементарные симметрические функции от $z_1, \dots, z_k$ через суммы степеней $z_1^m + \dots + z_k^m$. $\square$

Обозначим через $|D|$ образ проективизации пространства $L(D)$ при отображении α. Ограничение на $C^{(d)}$ отображения Абеля–Якоби $u\colon \mathrm{Div}(C) \to J(C)$ мы будем по-прежнему обозначать u. В дальнейшем мы будем считать, что точка $q \in C$ фиксирована.

Дивизор $D = p_1 + \dots + p_d$, где точки $p_1, \dots, p_d$ попарно различны, называют *общим*. Отображение $u\colon C^{(d)} \to J(C)$ голоморфно в окрестности общего дивизора D и локально ограничено, поэтому по теореме Римана о продолжении оно голоморфно на всем многообразии $C^{(d)}$.

Теорема 11.7.3. *Каждый слой отображения $u\colon C^{(d)} \to J(C)$ является проективным пространством, а именно, для любого дивизора $D \in C^{(d)}$ имеет место равенство $u^{-1}(u(D)) = |D|$.*

Доказательство. Проверим сначала, что $u^{-1}(u(D)) \subset |D|$. Пусть для дивизора $E \in C^{(d)}$ выполняется равенство $u(E) = u(D)$. Тогда $u(E - D) = 0$, поэтому по теореме Абеля существует мероморфная функция f, для которой $E - D = (f)$, т.е. $E = (f) + D$. Из условия $E \in C^{(d)}$ следует, в частности, что $E \geq 0$, поэтому $f \in L(D)$. Следовательно, $E = \alpha([f]) \in |D|$.

Проверим теперь, что $u^{-1}(u(D)) \supset |D|$. Предположим, что $E \in |D|$, т.е. существует мероморфная функция f, для которой $E = (f) + D$. Тогда по теореме Абеля $u(E) = u((f)) + u(D) = 0 + u(D) = u(D)$, а значит, $E \in u^{-1}(u(D))$. □

Выясним, как устроен дифференциал отображения $u\colon C^{(d)} \to J(C)$ при $d \le g$. Пусть $D \in C^{(d)}$. Тогда дифференциал отображения u в точке D — это отображение касательных пространств

$$(u_*)_D\colon T_D(C^{(d)}) \to T_{u(D)}(J(C)).$$

Пусть $D = p_1 + \dots + p_d$ — общий дивизор, z_j — локальная координата в окрестности точки p_j. Тогда $(z_1, \dots, z_d)$ — локальные координаты в окрестности точки D в $C^{(d)}$. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис пространства голоморфных 1-форм; в окрестности точки p_j получаем $\omega_\alpha = f_{\alpha j}(z_j)dz_j$, где $f_{\alpha j}(z_j)$ — голоморфная функция. В окрестности точки D отображение Абеля–Якоби представляется в виде

$$\begin{aligned} u(z_1, \dots, z_d) &= (u_1(z_1, \dots, z_d), \dots, u_g(z_1, \dots, z_d)) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{d} \int_q^{z_j} f_{1j}(z_j)dz_j, \dots, \sum_{j=1}^{d} \int_q^{z_j} f_{gj}(z_j)dz_j \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(u_*)_D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial u_g}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial z_d} & \dots & \frac{\partial u_g}{\partial z_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(p_1) & \dots & f_{g1}(p_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{1d}(p_d) & \dots & f_{gd}(p_d) \end{pmatrix},$$

и ранг матрицы $(u_*)_D$ равен рангу так называемой *матрицы Брилля–Нцтера* $\begin{pmatrix} \omega_1(p_1) & \dots & \omega_g(p_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1(p_d) & \dots & \omega_g(p_d) \end{pmatrix}$.

Пусть C — кривая рода $g \ge 2$. Рассмотрим каноническое отображение $\varphi_K\colon C \to \mathbb{CP}^{g-1}$, сопоставляющее точке $p \in C$ точку $(\omega_1(p) : \dots : \omega_g(p)) \in \mathbb{CP}^{g-1}$. Пусть $D = p_1 + \dots + p_d$ — общий дивизор. Ранг матрицы $(u_*)_D$ равен рангу матрицы Брилля–Нцтера, который, в свою очередь, равен размерности линейного пространства, натянутого на $\varphi_K(p_1), \dots, \varphi_K(p_d)$. Поэтому если мы обозначим через $\overline{\varphi_K(D)}$ размерность проективного пространства, натянутого на на $\varphi_K(p_1), \dots, \varphi_K(p_d)$, то получим $\operatorname{rank}(U_*)_D = \dim \overline{\varphi_K(D)} - 1$.

В алгебраической геометрии выражение*общий объект* некоторого семейства, параметризованного комплексным многообразием, обладает данным свойством, означает, что все объекты, не обладающие данным свойством, запараметризованы подмногообразием строго меньшей размерности.

Теорема 11.7.4. *Пусть C — гладкая кривая рода $g \ge 1$. Тогда для общей точки $D \in C^{(g)}$ выполняется равенство* $\operatorname{rank}(u_*)_D = g$.

Доказательство. Если $g = 1$, то $(u_*)_p = \omega(p) \neq 0$ для любой точки p. В этом случае равенство $\operatorname{rank} u_* = 1$ выполняется для всех точек.

Пусть теперь $g \geq 1$. Требуется доказать, что дивизоры $D = p_1+\cdots+p_g \in C^{(g)}$, для которых выполняется неравенство $\operatorname{rank}(u_*)_D \leq g-1$, лежат в подмногообразии в $C^{(g)}$, размерность которого меньше $\dim C^{(g)} = g$. По предположению $\dim \overline{\varphi_K(D)} \leq g-2$, т.е. существует $(g-2)$-мерное проективное подпространство H в $\mathbb{CP}^{g-1}$, содержащее все точки $\varphi_K(p_j)$. Подпространство H не может содержать компоненту канонической кривой $\varphi_K(C)$. Действительно, если бы равенство $\sum \lambda_s\omega_s(p) = 0$ выполнялось для всех p, то 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_g$ были бы линейно зависимы. Поэтому число точек пересечения подпространства H с канонической кривой $\varphi_K(C)$ не превосходит степени канонической кривой $\varphi_K(C)$, которая равна $2g-2$ (степени дивизора нулей голоморфной 1-формы). Таким образом, количество дивизоров $D \in C^{(d)}$, для которых все точки $\varphi_K(p_j)$ лежат в H, не превосходит $2g-2$. Многообразие проективных подпространств размерности $(g-2)$ в $\mathbb{CP}^{g-1}$ изоморфно $\mathbb{CP}^{g-1}$, т.е. имеет размерность $g-1$. Каждому такому подпространству соответствует не более $2g-2$ точек D, поэтому искомые точки D лежат в многообразии, размерность которого не превосходит $g-1$. $\square$

Докажем теперь усиленную версию теоремы обращения Якоби.

Теорема 11.7.5. *Ограничение на $C^{(g)}$ отображения Абеля–Якоби $u\colon C^{(g)} \to J(C)$ сюръективно и в общей точке инъективно.*

Доказательство. Нам потребуется следующее свойство голоморфных отображений комплексных многообразий одной и той же размерности.

Лемма 11.7.6. *Пусть X и Y — связные компактные комплексные многообразия одной и той же размерности. Предположим, что голоморфное отображение $f\colon X \to Y$ обладает двумя следующими свойствами: 1) прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ связен; 2) дифференциал f_* в общей точке является изоморфизмом касательных пространств. Тогда отображение f сюръективно и в общей точке инъективно.*

Доказательство. Подмножество $f(X) \subset Y$ является подмногообразием. Если дифференциал f_* в точке x_0 является изоморфизмом, то f отображает некоторую открытую окрестность точки x_0 на открытую окрестность точки $f(x_0)$. Поэтому $f(X)$ — подмногообразие в Y, содержащее открытое в Y множество. Для связного замкнутого многообразия Y это означает, что $f(X) = Y$. Таким образом, f сюръективно.

По теореме Сарда для общей точки $x \in X$ дифференциал f_* является изоморфизмом для всех точек $x' \in f^{-1}(f(x))$. Поэтому по теореме об обратной функции для общей точки $x \in X$ множество $f^{-1}(f(x))$ дискретно. Но по предположению множество $f^{-1}(f(x))$ связно для любой точки $x \in X$, поэтому оно состоит из одной точки. $\square$

Остается проверить, что отображение Абеля–Якоби обладает обоими свойствами, сформулированными в лемме. Но мы уже знаем, что для любого дивизора $D \in C^{(d)}$ множество $u^{-1}(u(D)) = |D|$ является образом проективизации пространства $L(D)$ при голоморфном отображении α. Кроме того, по теореме 11.7.4 дифференциал отображения Абеля–Якоби в общей точке является изоморфизмом. $\square$

Теорема обращения Якоби теперь легко получается из теоремы 11.7.5. Фиксируем точку $p \in C$ и обозначим через $C^{(g)} - gp$ множество дивизоров вида $D - gp$, где $D \in C^{(g)}$; каждый из этих дивизоров имеет степень 0. Ограничение отображения Абеля–Якоби u на $C^{(g)}$ сюръективно, поэтому ограничение отображения u на $C^{(g)} - gp$ тоже сюръективно. Следовательно, ограничение отображения u на $\mathrm{Div}^0(C)$ сюръективно.

11.8 θ-дивизор и θ-функции

Образы симметрических степеней $C^{(d)}$ кривой C в якобиане $J(C)$ относительно отображения Абеля–Якоби u_q при $d = 1, \ldots, g-1$ являются в нем выделенными подмногообразиями размерности d. Они определены инвариантно с точностью до сдвига — изменение начальной точки q приводит к сдвигу образа отображения Абеля–Якоби. В частности, имеется естественное отображение в якобиан самой кривой C и ее $(g-1)$-ой симметрической степени $C^{(g-1)}$. Образ последнего отображения является многомерным дивизором — подмногообразием коразмерности 1 в многообразии размерности g. Он называется θ-дивизором.

Мы видели, что по дивизору на кривой (точнее, по классу линейно эквивалентных дивизоров) строится линейное расслоение на ней. Аналогично, по дивизору в многообразии большой размерности строится линейное расслоение над этим многообразием. В частности, θ-дивизор в $J(C)$ определяет линейное расслоение над $J(C)$; оно называется θ-расслоением. Его многозначные сечения называются θ-функциями — их можно рассматривать как функции на пространстве $(\Omega^1(C))^\vee$, результатом факторизации которого является тор $J(C)$.

θ-функции имеют многообразные применения и их изучению посвящена обширная литература.