Алгебра 3-8

Для комплексного векторного пространства V обозначим через $_{\mathbb{R}}V$ множество V рассматриваемое как вещественное векторное пространство (по ученому - ограничение скаляров), а через $\overline{V}$ множество V рассматриваемое как комплексное пространство на котором комплексные числа действуют умножением на комплексно сопряженное.

Для вещественного векторного пространства V обозначим рассмотрим векторное пространство $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. На нем естественно действует поле комплексных чисел посредством умножения на второй сомножитель. Иногда мы будем обозначать это *комплексное* векторное пространство через V.

1. Эндоморфизм A пространства V индуцирует отображение $A \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ пространства $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Докажите что это отображение $\mathbb{C}$-линейно. Это отображение обозначается A

2. Найдите естественный (то есть совместимый с отображениями) изоморфизм между $_{\mathbb{R}}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ и прямой суммой $V \oplus \overline{V}$.

3. Пусть V - представление. Докажите что $_{\mathbb{R}}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \oplus \overline{V}$.

4. Найдите все неизоморфные неприводимые вещественные представления конечной циклической группы.

Комплексное векторное пространство может быть задано как пара (вещественное векторное пространство V, оператор на нем I равный в квадрате $-\mathrm{Id}_V$); а именно, I есть умножение на мнимую единицу.

Напомним что эрмитова положительно определенная форма H на комплексном векторном пространстве это функция от пар векторов такая что $H(u,v) = \overline{H(v,u)}; H(u_1+u_2, v) = H(u_1, v)+H(u_2, v), H(\lambda u, v) = \lambda H(u,v), \lambda \in \mathbb{C}$ и $H(u,u) > 0, u \neq 0$.

5. Докажите что вещественная часть B эрмитовой положительно определенной формы H – симметричная положительно определенная билинейная форма на вещественном пространстве $_{\mathbb{R}}V$, мнимая часть Ω эрмитовой положительно определенной формы H – антисимметричная билинейная форма на вещественном пространстве $_{\mathbb{R}}V$.

6.Найдите связь между B, Ω и оператором I умножения на мнимую единицу

7. Пусть B- вещественная положительно определенная билинейная форма на вещественном пространстве $_{\mathbb{R}}V$. Когда она является вещественной частью эрмитовой положительно определенной формы?

8*. Пусть B- вещественная положительно определенная билинейная форма на вещественном пространстве V а Ω антисимметричная билинейная форма на том же вещественном пространстве V. Когда существует комплексная структура на V и эрмитова положительно определенная форма такие что B и Ω являются вещественной и мнимой частью этой эрмитовой положительно определенной формы.