Задачи по группам и алгебрам Ли – 4

Задача без звездочки (со всеми пунктами) оценивается в 1 балл, задача со звездочкой – в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 за листок надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

В этом листке V_n – неприводимое представление группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$ размерности $n+1$.

1. Разложите представление $V_n \otimes V_m$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в прямую сумму неприводимых. *Указание:* выпишите характер этого представления.

2. Найдите кратность тривиального представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в представлении $V_1^{\otimes n}$.

3. Для каких n представление V_n допускает невырожденную инвариантную **а)** симметрическую билинейную форму; **б)** кососимметрическую билинейную форму?
Указание: инвариантная
билинейная форма есть инвариантный элемент в $V_n^* \otimes V_n^*$.

4. Докажите, что группа $SL_2(\mathbb{C})\times SL_2(\mathbb{C})$ сохраняет невырожденную симметрическую билинейную форму на пространстве $V_1 \otimes V_1$.

5. Пользуясь предыдущей задачей, постройте двулистное накрытие $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$.

6. Какие из 3-мерных комплексных алгебр Ли **а)** разрешимы; **б)** нильпотентны?

7. Докажите, что всякая разрешимая алгебра Ли есть полупрямая сумма одномерной алгебры Ли и (разрешимого) идеала.
Указание: таким идеалом может быть любое подпространство, содержащее коммутант.

8. Докажите, что всякая односвязная разрешимая группа Ли есть полупрямое произведение аддитивной группы $\mathbb{R}$ на (разрешимую) нормальную подгруппу Ли.
Указание: воспользуйтесь предыдущей задачей.

9. Докажите, что односвязная разрешимая группа Ли стягиваема.
Указание: можно вести индукцию по размерности, пользуясь предыдущей задачей.

10. Пользуясь теоремой Ли для присоединенного представления, докажите, что коммутант разрешимой алгебры Ли нильпотентен.

11*. Найдите $SL_2(\mathbb{C})$-орбиту старшего вектора $v_n \in V_n$.

12*. Опишите все неприводимые вещественные представления группы Ли **а)** SU_2; **б)** $SO_3(\mathbb{R})$.

13*. Найдите замыкание Мальцева 1-мерной подалгебры Ли в $\mathfrak{su}_n$, порожденной элементом $x \in \mathfrak{su}_n$ в зависимости от собственных значений x.

14*. **а)** Комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит разрешимую подалгебру Ли $\mathfrak{h}$ размерности k. Докажите, что $\mathfrak{g}$ содержит $k+1$-мерную подалгебру Ли.
Указание: примените теорему Ли к представлению алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.
б) Докажите *теорему Энгеля*: алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда операторы $\mathrm{ad}\, x$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ нильпотентны.
Указание: пользуясь пунктом (а), всякую нильпотентную подалгебру Ли в $\mathfrak{g}$ можно увеличить.

15*. Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает невырожденное, как линейный оператор, дифференцирование D. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна.