Глава 12

Геометрия римановых поверхностей

Комплексная структура — лишь одна из возможных точек зрения на римановы поверхности. Интерпретации римановой поверхности как двумерной вещественной поверхности, наделенной римановой метрикой постоянной кривизны или конформной структурой приводят к аналогичным результатам. Подробное изложение этих подходов потребовало бы слишком много места. Мы дадим краткое описание геометрической точки зрения на римановы поверхности, показав возможности другого языка при работе с ними.

12.1 Теорема униформизации

Напомним, что мы не проводим различия между римановыми поверхностями и комплексными алгебраическими кривыми.

Пусть C — компактная комплексная кривая. У такой кривой, как и у всякого многообразия, имеется универсальное накрытие $V \to C$ односвязным многообразием. Как и при всяком накрытии комплексной кривой, комплексная структура на C поднимается на накрывающую поверхность V, превращая ее в комплексную кривую, см. п. 2.5.

Список односвязных двумерных поверхностей очень узок. В нем всего две поверхности — сфера и плоскость (или, что то же самое, открытый единичный диск на плоскости). Список односвязных комплексных кривых немногим шире. Он состоит всего из трех кривых — на поверхности, гомеоморфной плоскости, можно ввести две различные комплексные структуры, тогда как на сфере такая структура единственна.

Теорема 12.1.1 (униформизации)**.** *Всякая односвязная комплексная кривая без края биголоморфна либо проективной прямой* $\mathbb{CP}^1$*, либо комплексной прямой* $\mathbb{C}$*, либо открытому единичному диску* D *на комплексной пря-*

мой. Никакие две из этих трех кривых друг другу не биголоморфны.

Мы не приводим доказательства этой теоремы, отсылая читателя, например, к [].

Открытый единичный диск D на комплексной прямой биголоморфен верхней полуплоскости $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$, заданной неравенством $\operatorname{Im} z > 0$, и мы будем пользоваться как той, так и другой моделью.

Упражнение 12.1.2. Укажите дробно-линейное преобразование, переводящее открытый единичный диск D на комплексной прямой взаимно-однозначно в верхнюю полуплоскость $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$, заданной неравенством $\operatorname{Im} z > 0$. Докажите, что никакие две из трех упомянутых в теореме односвязных комплексных кривых друг другу не биголоморфны.

Группа монодромии накрытия действует на накрывающей поверхности свободно и без неподвижных точек. Если накрывающая поверхность односвязна, то группа монодромии накрытия изоморфна фундаментальной группе накрываемой поверхности.

Группа биголоморфных отображений проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ состоит, как мы знаем, из дробно-линейных преобразований. У всякого нетривиального дробно-линейного преобразования есть две неподвижные точки, поэтому единственной римановой поверхностью, универсальным накрытием над которой служит проективная прямая, является она сама.

Группа биголоморфных отображений комплексной прямой $\mathbb{C}$ это группа аффинных преобразований $z \mapsto az + b$, где $a \neq 0, b$ — комплексные константы. Такое преобразование не имеет неподвижных точек только, если $a = 1$, т.е. если оно является сдвигом. Дискретные группы сдвигов — это тривиальная группа, группа порожденная одним нетривиальным сдвигом, и группа, порожденная двумя линейно независимыми сдвигами. В первом случае факторповерхностью является сама комплексная прямая, во втором — открытый цилиндр, в третьем — эллиптическая кривая.

Наконец, всякая компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$ представляет собой результат факторизации диска D (или верхней полуплоскости $\mathcal{H}$) по дискретному свободному действию некоторой группы биголоморфных отображений. Такая группа называется *фуксовой группой.*

Подводя итог, односвязная кривая, накрывающая данную комплексную кривую, определяется знаком эйлеровой характеристики этой кривой: проективная прямая накрывает только себя, и эйлерова характеристика накрываемой кривой положительна, комплексная прямая накрывает эллиптические кривые, имеющие нулевую эйлерову характеристику, верхняя полуплоскость накрывает все кривые старших родов, и их эйлерова характеристика отрицательна. Это утверждение распространяется и на некомпактные гладкие комплексные кривые.

12.2 Метрики постоянной кривизны на односвязных поверхностях

На каждой односвязной римановой поверхности — проективной прямой $\mathbb{CP}^1$, комплексной прямой $\mathbb{C}$ и верхней полуплоскости $\mathcal{H}$ — имеется единственный способ ввести метрику постоянной кривизны, так чтобы сохраняющие ориентацию изометрии являлись одновременно биголоморфными отображениями. Знак кривизны определен поверхностью однозначно, и путем нормализации можно добиться, чтобы кривизна равнялась $+1$ в случае проективной прямой (сферы), 0 для комплексной прямой (плоскости) и -1 для полуплоскости. Этим случаям соответствуют сферическая геометрия, плоская геометрия и геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия).

Сферическая геометрия — это геометрия единичной сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Плоская геометрия задается стандартной метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Геометрия Лобачевского на верхней полуплоскости задается метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Группы изометрий этих многообразий имеют вещественную размерность 3. Группа сохраняющих ориентацию изометрий сферы это трехмерная группа вращений $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Группа сохраняющих ориентацию изометрий плоскости это трехмерная группа движений $E(2, \mathbb{R})$. Каждый элемент этой группы является сдвигом или поворотом вокруг некоторой точки плоскости. Группа сохраняющих ориентацию изометрий плоскости Лобачевского это трехмерная группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Действие элемента $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ab - cd = 1$, на верхней полуплоскости имеет вид $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

Упражнение 12.2.1. Проверьте, что при вещественных a, b, c, d, таких, что $ab - cd = 1$ преобразование $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ действительно является отображением верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\ z > 0$ на себя и сохраняет метрику

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

где $z = x + iy$.

Геодезическими в сферической геометрии являются окружности большого круга, в плоской геометрии — прямые, в геометрии Лобачевского — перпендикулярные прямой $y = 0$ полуокружности и прямые.

Упражнение 12.2.2. Проверьте, что во всех трех геометриях из любой точки в любом направлении выходит ровно одна геодезическая. Проверьте, что в геометрии Лобачевского через любые две точки проходит ровно одна геодезическая. Для каких пар точек в сферической геометрии это неверно?

В каждой из трех геометрий отражение относительно геодезической является изометрией, меняющей ориентацию поверхности.

12.3 Свободное дискретное действие групп на плоскости Лобачевского

На сфере нет нетривиальных сохраняющих ориентацию изометрий без неподвижных точек. Всякая такая изометрия плоскости это сдвиг. Тор, представляющий собой результат факторизации плоскости по группе, порожденной двумя линейно независимыми сдвигами, наделен плоской метрикой. Такие торы параметризуются двумя вещественными параметрами — минимальными длинами замкнутых геодезических, представляющих образующие в группе целочисленных первых гомологий.

Разнообразие свободного действия дискретных групп на плоскости Лобачевского гораздо больше.

Пусть группа Γ действует дискретно и свободно изометриями верхней полуплоскости $\mathcal{H}$. Назовем *областью Дирихле* Δ_p точки $p \in \mathcal{H}$ относительно действия группы Γ множество

$$\Delta_p = \{z \in \mathcal{H} | \rho(Tz, p) > \rho(z, p) \quad \forall\, T \in \Gamma\}.$$

Другими словами, Δ_p состоит из ближайших к p точек всякой орбиты группы Γ. Область Дирихле любой точки является фундаментальной областью действия группы Γ. Это означает, что образы ее замыкания под действием элементов этой группы покрывают всю верхнюю полуплоскость, причем любые два таких образа могут пересекаться лишь по точкам своей границы. Другими словами, образы фундаментальной области при действии группы Γ замощают верхнюю полуплоскость.

Замыкание всякой области Дирихле Δ_p представляет собой многоугольник с четным числом сторон, причем каждая сторона многоугольника является геодезической на плоскости Лобачевского. Множество вершин многоугольника Δ_p разбивается на непересекающиеся подмножества *конгруэнтных вершин*; каждое из этих подмножеств состоит из вершин, лежащих в одной орбите действия группы Γ на $\mathcal{H}$. Аналогично, множество сторон разбивается на пары конгруэнтных сторон. Это разбиение множества сторон на пары обеспечивает реализацию накрываемой поверхности как результата склейки многоугольника с четным числом сторон (см. п. 0.4), и род поверхности восстанавливается по комбинаторике склейки. Конгруэнтные стороны имеют одинаковую длину.

Для любой пары гладких кривых на плоскости Лобачевского, проходящих через одну точку, определен угол между ними (точнее, два взаимодополнительных угла). Сумма углов при конгруэнтных вершинах области Дирихле данной точки равна 2π, что и обеспечивает возможность склейки области Дирихле в гладкую поверхность. Площадь произвольного треугольника с геодезическими сторонами на плоскости Лобачевского дается формулой Гаусса–Бонне:

$$S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

где в правой части из π вычитается сумма углов при вершинах треугольника.

Упражнение 12.3.1. Воспользовавшись формулой Гаусса–Бонне для треугольника, докажите формулу Гаусса–Бонне для многоугольников: на плоскости Лобачевского площадь n-угольника с геодезическими сторонами равна результату вычитания из $(n-2)\pi$ суммы углов этого n-угольника.

Вычислим теперь площадь римановой поверхности рода $g \geq 2$, имеющей постоянную кривизну -1. Такая поверхность склеивается из многоугольника с четным числом сторон $2E$, причем в результате склейки граница многоугольника образует на поверхности граф с числом ребер E, одной гранью и количеством вершин V, удовлетворяющим формуле Эйлера

$$V - E + 1 = 2 - 2g.$$

Сумма углов, склеенных в каждой вершине графа на поверхности, равна 2π, поэтому сумма всех углов исходного $2E$-угольника равна $2\pi V$. Согласно предыдущему упражнению, это означает, что его площадь, а значит, и площадь склеенной поверхности, равна

$$S = (2E-2)\pi - 2\pi V = 2\pi(E-1-V) = 2\pi(2g-2).$$

Тем самым, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 12.3.2 (Формула Гаусса–Бонне для римановых поверхностей)**.** *Площадь римановой поверхности постоянной кривизны -1 рода $g \geq 2$ зависит лишь от рода этой поверхности и равна $S_g = 2\pi(2g-2)$.*

Выберем стандартный набор образующих $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ фундаментальной группы $\pi_1(C, x_0)$ накрываемой поверхности C. Элементы этого набора подчиняются соотношению $\gamma_1 \dots \gamma_{2g}\gamma_1^{-1} \dots \gamma_{2g}^{-1} = \mathrm{id}$. Соответствующее пути γ_i преобразование накрывающей поверхности $\mathcal{H}$ является изометрией плоскости Лобачевского. Таким образом, стандартный базис фундаментальной группы накрываемой поверхности C задает набор изометрий $G_1, \dots, G_{2g}$ плоскости Лобачевского, удовлетворяющих соотношению

$$G_1 \dots G_{2g} G_1^{-1} \dots G_{2g}^{-1} = \mathrm{id}\,.$$

Наоборот, общий набор из $2g$ изометрий плоскости Лобачевского, не имеющих неподвижных точек и удовлетворяющих этому соотношению, задает дискретную подгруппу группы изометрий $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, и фактор верхней полуплоскости по действию этой группы является двумерной компактной поверхностью, наделенной метрикой постоянной отрицательно кривизны -1.

В результате мы получаем возможность вычислить размерность пространства модулей кривых геометрическими методами. Для того, чтобы задать действие группы монодромии, нам следует задать $2g-1$ матриц $G_1, \dots, G_{2g-1}$, $G_j \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, общего положения. При общем выборе этих матриц для матрицы G_{2g} остается лишь конечное число возможностей. При выбранных координатах в $\mathcal{H}$ мы получаем $2g-1$ матриц из трехмерного семейства, т.е. пространство таких наборов имеет размерность $3 \cdot (2g-1)$. Выбор координат в $\mathcal{H}$ определен однозначно с точностью до изометрии, а группа изометрий имеет размерность 3. Поэтому вещественная размерность пространства модулей кривых равна

$$3(2g-1)-3=6(g-1)=2\cdot(3g-3),$$

что согласуется с результатами вычисления Римана, см. п. 9.5.

12.4 Примеры

Пусть $A, B, C \in \mathcal{H}$ — попарно различные точки в верхней полуплоскости. Соединив их попарно геодезическими, мы получим треугольник ABC с геодезическими сторонами. Результат отражения треугольника относительно каждой из его сторон является треугольником с теми же углами и длинами сторон. Величины углов треугольника определяют его однозначно с точностью до изометрии. В частности, длины сторон треугольника однозначно определяются его углами. Группа, порожденная отражениями относительно каждой из трех сторон треугольника, — группа изометрий верхней полуплоскости. Если выполняется следующее условие на углы треугольника, то его образы при действии этой группы замощают всю верхнюю полуплоскость :

Каждый из углов треугольника ABC есть результат деления π на натуральное число, большее 1, причем, если a, b, c эти натуральные числа, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$.

Группа изометрий верхней полуплоскости, порожденная отражениями относительно сторон треугольника с углами $\pi/a, \pi/b, \pi/c$, называется *треугольной группой* (a, b, c).

Результат факторизации верхней полуплоскости по действию подгрупп в треугольных группах — источник наиболее симметричных римановых поверхностей. Отражение меняет ориентацию верхней полуплоскости, поэтому для получения римановой поверхности мы должны рассматривать подгруппы в треугольной группе, состоящие из элементов четной длины. Фундаментальная область такой группы представляет собой объединение нескольких треугольников.

Так, поверхность Больца — наиболее симметричная риманова поверхность рода 2 — это результат факторизации верхней полуплоскости по подгруппе в треугольной группе $(2, 3, 8)$. Последовательно отражая такой треугольник относительно сторон, образующих угол $\pi/8$, мы получаем правильный восьмиугольник с углами при вершинах $2\pi/3$, составленный из 16 треугольников с углами $\pi/2, \pi/3, \pi/8$. Площадь этого восьмиугольника равна ушестнадцатиренной площади треугольника, т.е. равна $16\cdot\frac{\pi}{24}=\frac{2\pi}{3}$. Образы такого восьмиугольника под действием соответствующей подгруппы образуют замощение верхней полуплоскости правильными восьмиугольниками.

Согласно формуле Гаусса–Бонне, площадь фундаментальной области, из которой склеивается поверхность Больца, равна 4π. Такую фундаментальную область можно составить из шести правильных восьмиугольников.

Упражнение 12.4.1. Приведите фундаментальную область, составленную из шести правильных 8-угольников с углом $2\pi/3$ при вершине, и разбиение сторон этой области на пары, попарная склейка которых дает поверхность Больца.

Поверхность Больца можно также рассматривать как результат факторизации верхней полуплоскости по подгруппе в треугольной группе $(3,3,4)$ — такой треугольник состоит из двух треугольников с углами $\pi/2, \pi/3, \pi/8$.

Квартика Клейна — поверхность Гурвица рода 3, см. п. 5.6, — реализуется как результат факторизации верхней полуплоскости по подгруппе в треугольной группе $(2,3,7)$. Эта группа определяет, в частности, замощение верхней полуплоскости правильными 7-угольниками, склеенными каждый из 14 треугольников с углами $\pi/2, \pi/3, \pi/7$.

Упражнение 12.4.2. Найдите площадь правильного 7-угольника с углом $2\pi/3$ при вершине. Составьте из таких 7-угольников фундаментальную область действия группы изометрий и разбиение сторон этой области на пары, попарная склейка которых дает квартику Клейна.

Поверхности Гурвица старших родов также представляют собой результат факторизации верхней полуплоскости по действию различных подгрупп треугольной группы $(2,3,7)$.

Упражнение 12.4.3. Треугольные группы существуют и в плоской, и в сферической геометрии. Какие условия на углы треугольника требуется наложить в каждой из этих геометрий, чтобы его образы при последовательных отражениях относительно сторон замощали соответственно плоскость и сферу? Приведите примеры таких треугольников в каждой из геометрий.

12.5 Несвободные действия дискретных групп

Понятие фуксовой группы может быть расширено. Помимо групп изометрий, действующих на верхней полуплоскости свободно, мы можем рассматривать также группы, преобразованиям из которых разрешается иметь неподвижные точки. Факторповерхность по действию такой группы не является гладкой. Кроме того вершины (и даже стороны) фундаментальной области группы изометрий могут находиться на вещественной прямой. Факторповерхность по действию такой группы некомпактна. Угол в вершине, находящейся на вещественной прямой,ы равен нулю, поскольку все геодезические выходят в одном направлении — вертикально.

Рассмотрим в качестве примера модулярную группу $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Эта группа встречалась нам в п. 5.3. Она действует на верхней полуплоскости $\mathcal{H}$ дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

в которых a,b,c,d — целые числа, причем $ad-bc=1$. Факторпространство верхней полуплоскости по действию этой группы — модулярная кривая, т.е. пространство модулей эллиптических кривых с одной отмеченной точкой.

Фундаментальная область действия модулярной группы, которую мы построили в п. 5.3, с точки зрения гиперболической геометрии представляет собой треугольник. Углы этого треугольника равны $\pi/3, \pi/3, 0$. Одна из его вершин лежит в бесконечности, т.е. на вещественной прямой, а угол при вершине, лежащей на вещественной прямой, равен 0. Этот треугольник составлен из двух прямоугольных треугольников, с углами $\pi/2, \pi/3, 0$. Для площадей треугольников, одна или несколько вершин которого лежат на вещественной прямой, справедлива та же формула Гаусса–Бонне, поэтому площадь такого прямоугольного треугольника равна $\pi/6$, а площадь фундаментальной области действия модулярной группы вдвое больше и равна $\pi/3$.

Преобразования $z \mapsto z+1$ и $z \mapsto -1/z$ порождают модулярную группу. У второго из них есть неподвижная точка $z = e^{\pi i/2}$, а композиция второго преобразования со сдвигом имеет неподвижную точку $z = e^{\pi i/3}$. Каждая из этих неподвижных точек становится особой точкой факторповерхности — модулярной кривой. Это конические особенности — в первой из них сумма всех примыкающих к ней углов равна π, во второй — $2\pi/3$. Как мы видели, эллиптические кривые с такими периодами более симметричны, чем общие эллиптические кривые. Модулярная кривая некомпактна — третья вершина фундаментальной области лежит на вещественной прямой. След на модулярной кривой от этой (несуществующей) вершины называется *каспом.*

Отображение $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}_p)$, сопоставляющее 2×2-матрице матрицу, составленную из вычетов исходной по модулю p, является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма, являясь подгруппой в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, также является группой изометрий верхней полуплоскости. Факторповерхность по действию этой группы называется *модулярной кривой уровня p.* Геометрия модулярных кривых различных уровней играет центральную роль в арифметике эллиптических кривых.