Семинар по спецфункциям. Листок 9

Точка $t_0 \in \mathbb{C}$ называется регулярной особой точкой системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \qquad A(t) - \text{матрица } n \times n$$

если t_0 - простой полюс матричнозначной функции $A(t)$, т.е., функция $(t-t_0)A(t)$ аналитична в точке $t = t_0$.

1. а) Найдите все линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка, для которых 0 и бесконечность являются единственными регулярными особыми точками. Перечислите все линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка и их решения, имеющие в расширенной комплексной плоскости ровно две регулярных особых точки.

   б) Докажите, что точка t_0 является регулярной особой точкой для линейного дифференциального уравнения $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0$ тогда и только тогда, когда оно может быть переписано в виде

   $$(t-t_0)^n x^{(n)} + (t-t_0)^{(n-1)} P_{n-1}(t) x^{(n-1)} + (t-t_0)^{(n-2)} P_{n-2}(t) x^{(n-2)} + \ldots + P_0(t),$$

   где $P_0(t), \ldots P_{n-1}(t)$ - аналитические в окрестности точки $t = t_0$ функции.

2. Покажите, что при нецелых a, b, c гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{dy}{dz} - aby = 0 \qquad \text{имеет}$$

фундаментальную систему решений вида $y_1(z)$, $y_2(z)$, в которой $y_1(z)$ и $y_2(z)/z^{1-c}$ аналитичны в нуле;

фундаментальную систему решений вида $y_3(z)$, $y_4(z)$, в которой $y_3(z)$ и $y_4(z)/(z-1)^{c-a-b}$ аналитичны в единице;

фундаментальную систему решений вида $y_5(z)$, $y_6(z)$, в которой $y_5(z)z^a$ и $y_6(z)z^b$ аналитичны в бесконечности. Выпишите эти решения в гипергеометрических рядах.

3. Пусть C - двойная петля вокруг точек 0 и 1, не охватывающая точку z, $\operatorname{Re} z < 0$. Найдите коэффициент пропорциональности между интегралами

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt \qquad \text{и} \qquad \int_C t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

при условии сходимости первого из них.

4. В условиях задачи 2 выпишите решения $y_k(z)$, $k = 1, \ldots, 6$ в виде
   а) рядов, сходящихся в некоторой области;
   б) гипергеометрических интегралов по конечным или бесконечным отрезкам;
   в) гипергеометрических интегралов по замкнутым контурам типа двойных петель.

5. а) Докажите, что гипергеометрическая функция $F_{p,q}(a_1, \ldots, a_p; c_1, \ldots c_q; z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

   $$\{z(\delta + a_1)\cdots(\delta + a_p) - \delta(\delta + c_1 - 1)\cdots(\delta + c_q - 1)\}\, y = 0, \qquad \delta = z\frac{d}{dz}.$$

   б) покажите, что при $p = q + 1$ это уравнение имеет три регулярных особых точки.
   в) покажите, что при $p \neq q+1$ это уравнение имеет две особых точки, одна из которых регулярна, а другая - нет.

6. а) Найдите линейное соотношение с функциональными соотношениями на смежные гипергеометрические функции $F(a, b, c; z)$, $F(a, b, c+1; z)$, $F(a, b, c-1; z)$.
   б) Найдите линейное соотношение с постоянными соотношениями на смежные гипергеометрические функции $F(a, b, c; z)$, $F(a-1, b+1, c; z)$, $F(a-1, b, c+1; z)$.